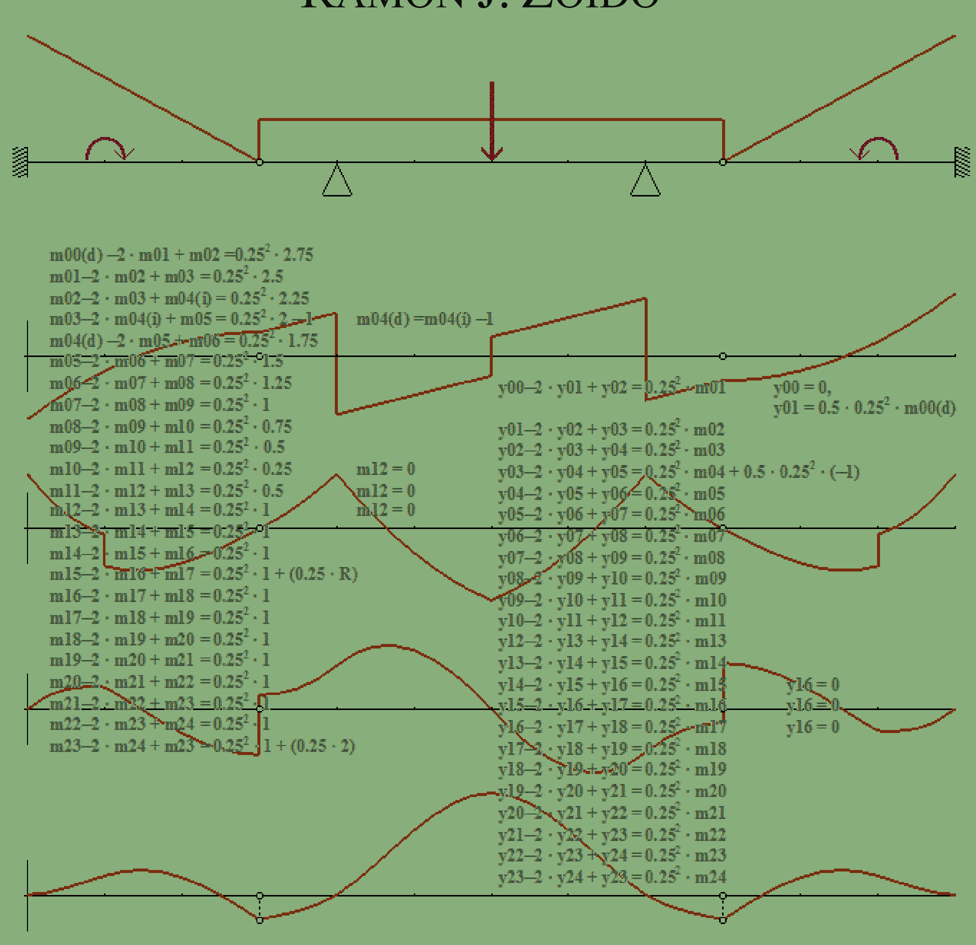
MÉTODOS EN DIFERENCIAS FINITAS APLICADOS AL ANÁLISIS DE LA FLEXIÓN SIMPLE EN VIGAS RECTAS DE RIGIDEZ CONSTANTE (IV)

por

PEDRO GALÁN DEL SASTRE

RAMÓN J. ZOIDO



CUADERNOS DEL INSTITUTO JUAN DE HERRERA DE LA *ESCUELA DE ARQUITECTURA DE MADRID*

3-53-10

MÉTODOS EN DIFERENCIAS FINITAS APLICADOS AL ANÁLISIS DE LA FLEXIÓN SIMPLE EN VIGAS RECTAS DE RIGIDEZ CONSTANTE (IV)

por

PEDRO GALÁN DEL SASTRE
RAMÓN J. ZOIDO

CUADERNOS
DEL INSTITUTO
JUAN DE HERRERA
DE LA *ESCUELA DE ARQUITECTURA DE MADRID*

3-53-10

C U A D E R N O S

D E L I N S T I T U T O

J U A N D E H E R R E R A

NUMERACIÓN

2 Área

51 Autor

09 Ordinal de cuaderno (del autor)

TEMAS

1 ESTRUCTURAS

2 CONSTRUCCIÓN

3 FÍSICA Y MATEMÁTICAS

4 TEORÍA

5 GEOMETRÍA Y DIBUJO

6 PROYECTOS

7 URBANISMO

8 RESTAURACIÓN

0 VARIOS

Métodos en diferencias finitas aplicados al análisis de la flexión simple en vigas rectas de rigidez constante (IV).

Instituto Juan de Herrera.
Escuela Técnica Superior de Arquitectura de Madrid.
Gestión y portada: Almudena Gil Sancho.
CUADERNO 422.01 / 3-53-10
ISBN-13 (obra completa): 978-84-9728-492-9
ISBN-13: 978-84-9728-496-7
Depósito Legal: M-17384-2014

El problema del análisis de la flexión simple en piezas rectas de sección constante con ciertas hipótesis complementarias y otras condiciones de forma y solicitación nos conduce a un modelo regido por una ecuación diferencial lineal de coeficientes constantes con condiciones de contorno que puede ser reducido a un problema unidimensional definido en un intervalo. Este problema es, como se sabe, fundamental en el campo de la edificación por el predominio de estas piezas en arquitectura e ingeniería. La presencia de cargas y momentos puntuales en las solicitaciones de vigas es imprescindible para completar un modelo operativo ya que permite ampliar substancialmente el campo del análisis a vigas de varios tramos y otros problemas de interés en el contexto estructural. Pero esta presencia nos impide efectuar holgadamente integraciones "convencionales" con lo que se necesita acudir a otros procedimientos matemáticos entre los que se encuentran los métodos numéricos.

El método de integración por diferencias finitas es un método numérico universal y extraordinariamente eficaz que resulta una solución idónea por su simplicidad y adaptabilidad a cualquier tipo de planteamientos en este ámbito. El sistema de ecuaciones al que conduce la resolución de los problemas puede hoy día ser resuelto con gran facilidad por la mayor parte de calculadoras ordinarias y programas informáticos.

Después de una exposición del procedimiento con carácter general descrito sobre los casos más simples para ecuaciones de 2º y 4º orden, se ha procedido a configurar unas fórmulas de uso sistemático totalmente adaptadas a las condiciones del problema de la flexión simple en lo que hemos denominado "métodos en dos etapas" partiendo de la caracterización de las condiciones de conjugación de la unión rígida, el tratamiento de las secciones extremas y, en su caso, de la unión articulada. Con esta descripción pormenorizada puede ya procederse reiteradamente sobre las piezas de uno o varios tramos sean cuales sean sus vinculaciones de extremo. Se ha dado la mayor importancia a los ejercicios prácticos que son los que permiten comprender la metodología operativa y obtener los resultados buscados en los distintos casos comparando sus soluciones con las obtenidas por otros métodos.

Finalmente somos conscientes de que en un trabajo de estas características es inevitable la aparición de erratas o de falta de precisión que iremos corrigiendo en revisiones posteriores.

Pedro Galán del Sastre
Ramón J. Zoido
Mayo 2014

Índice general

4 Extensión a las vigas de varios tramos

4.1. Extensión a las vigas de varios tramos

La introducción de las cargas y los momentos puntuales nos permiten extender los métodos empleados a las vigas de varios tramos que conserven la rigidez B constante a lo largo de toda su longitud. Los apoyos rígidos interiores en las vigas incorporan una nueva incógnita R –reacción sobre el apoyo– y aportan una condición –descenso nulo en el punto de apoyo– que se convierte en una nueva ecuación, por lo que bastará considerar el correspondiente modelo de viga de un solo tramo que contenga ambas condiciones. Sin prejuzgar el signo de dicha reacción la describiremos inicialmente como positiva siendo posteriormente el resultado del cálculo el que nos definirá su signo que en la mayor parte de los casos será negativo. La figura 4.1 ilustra algunos casos representativos de esta reducción con independencia del tipo de solicitaciones al que esté sometida la viga continua. Las vigas de varios tramos a), b) y c) se reducen a vigas estandarizadas a'), b') y c') con las correspondientes cargas concentradas puntuales que pasan a incrementar las leyes de cargas y cuyo valor ha de ser calculado junto al sistema. Para cada uno de los apoyos interiores –rígidos– dispondremos de una condición adicional de descenso nulo.

Los siguientes ejemplos muestran la forma general de proceder.

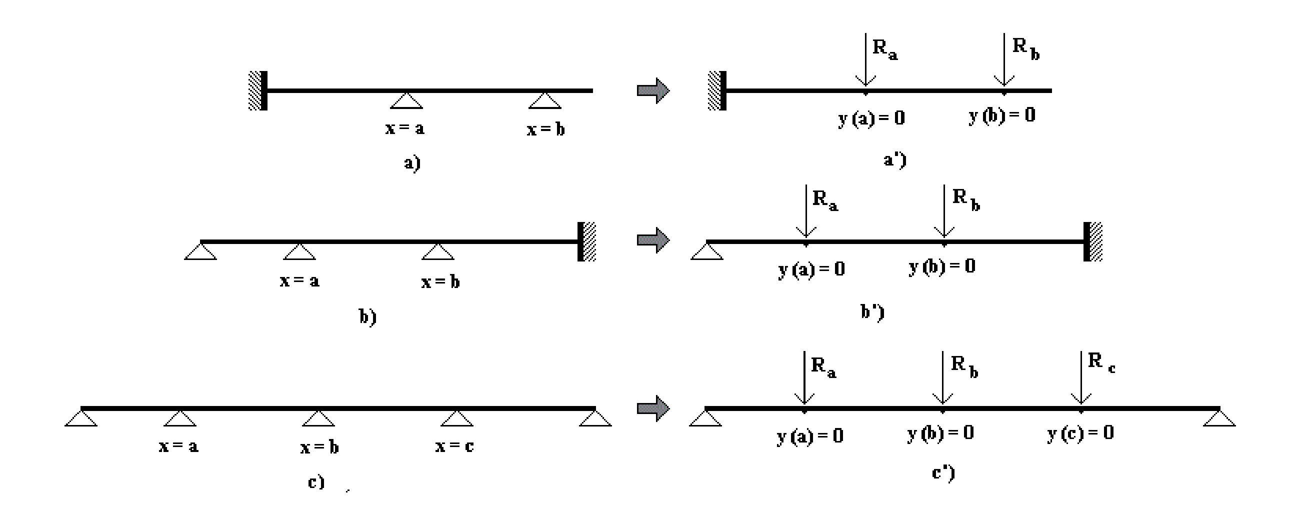


Figura 4.1

4.1.1. Viga empotrada en su extremo izquierdo con un apoyo rígido interior

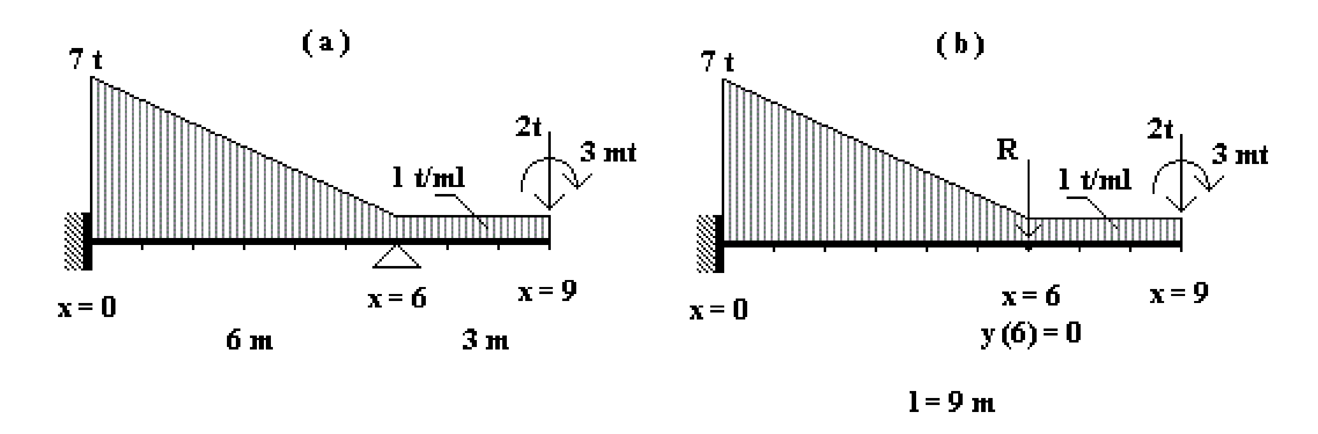


Figura 4.2

Se considera la viga de 6 m, con voladizo de 3 m y la ley de cargas que se representa en la figura 4.2(a). En la figura 4.2(b) se representa la ménsula equivalente empotrada en su extremo izquierdo con una reacción R en el punto del apoyo interior rígido x $=$ 6, más la condición adicional $y\,(6) = 0$.

La componente continua de la ley de cargas puede ser representada ahora en el intervalo $(0, 9)$ por la función

$$w\,(x) = \begin{cases} -x + 7, & \text{si } 0 < x < 6, \\ 1, & \text{si } 6 < x < 9. \end{cases}$$

Sobre este último modelo, podemos proceder a establecer su sistema de ecuaciones correspondiente teniendo en cuenta la reacción R desconocida pero incorporando al sistema la correspondiente ecuación adicional. Estableceremos una red de paso $h = 0.25$ y con auxilio de la figura 4.3 escribiremos, junto a las condiciones adicionales, el sistema de ecuaciones resultante que será el siguiente:

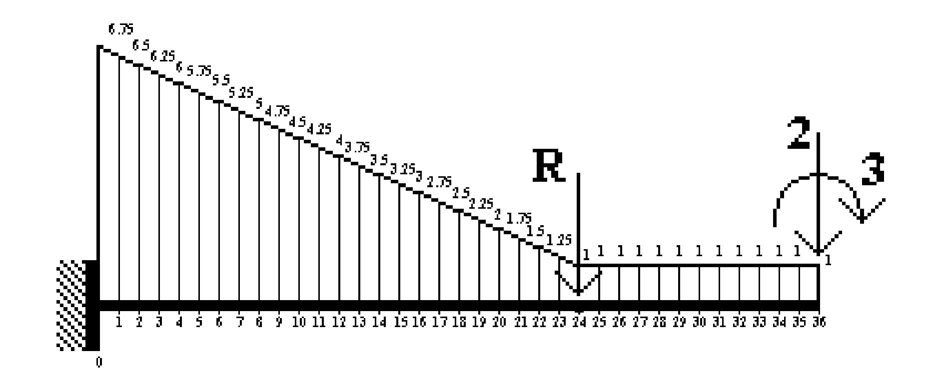


Figura 4.3

1ª etapa

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_2-2m_1+m_0\left(d\right)\right) &= 6.75,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_3-2m_2+m_1\right) &= 6.5,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_4-2m_3+m_2\right) &= 6.25,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_5-2m_4+m_3\right) &= 6,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_6-2m_5+m_4\right) &= 5.75,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_7-2m_6+m_5\right) &= 5.5,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_8-2m_7+m_6\right) &= 5.25,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_9-2m_8+m_7\right) &= 5,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{10}-2m_9+m_8\right) &= 4.75,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{11}-2m_{10}+m_9\right) &= 4.5,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{12}-2m_{11}+m_{10}\right) &= 4.25,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{13}-2m_{12}+m_{11}\right) &= 4,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{14}-2m_{13}+m_{12}\right) &= 3.75,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{15}-2m_{14}+m_{13}\right) &= 3.5,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{16}-2m_{15}+m_{14}\right) &= 3.25,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{17}-2m_{16}+m_{15}\right) &= 3,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{18}-2m_{17}+m_{16}\right) &= 2.75,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{19}-2m_{18}+m_{17}\right) &= 2.5,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{20}-2m_{19}+m_{18}\right) &= 2.25,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{21}-2m_{20}+m_{19}\right) &= 2,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{22}-2m_{21}+m_{20}\right) &= 1.75,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{23}-2m_{22}+m_{21}\right) &= 1.5,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{24}-2m_{23}+m_{22}\right) &= 1.25,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{25}-2m_{24}+m_{23}\right) &= 1+\tfrac{R}{0.25},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{26}-2m_{25}+m_{24}\right) &= 1,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{27}-2m_{26}+m_{25}\right) &= 1,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{28}-2m_{27}+m_{26}\right) &= 1,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{29}-2m_{28}+m_{27}\right) &= 1,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{30}-2m_{29}+m_{28}\right) &= 1,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{31}-2m_{30}+m_{29}\right) &= 1,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{32}-2m_{31}+m_{30}\right) &= 1,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{33}-2m_{32}+m_{31}\right) &= 1,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{34}-2m_{33}+m_{32}\right) &= 1,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{35}-2m_{34}+m_{33}\right) &= 1,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{36}\left(i\right)-2m_{35}+m_{34}\right) &= 1,
\end{aligned}$$

con las condiciones:

$m_{35}=\frac{1}{2}\cdot 0.25^2\cdot 1+0.25\cdot 2+3,$

$m_{36}\left(i\right)=3,$

2ª etapa

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_2-2y_1+y_0\right) &= m_1,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_3-2y_2+y_1\right) &= m_2,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_4-2y_3+y_2\right) &= m_3,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_5-2y_4+y_3\right) &= m_4,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_6-2y_5+y_4\right) &= m_5,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_7-2y_6+y_5\right) &= m_6,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_8-2y_7+y_6\right) &= m_7,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_9-2y_8+y_7\right) &= m_8,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{10}-2y_9+y_8\right) &= m_9,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{11}-2y_{10}+y_9\right) &= m_{10},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{12}-2y_{11}+y_{10}\right) &= m_{11},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{13}-2y_{12}+y_{11}\right) &= m_{12},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{14}-2y_{13}+y_{12}\right) &= m_{13},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{15}-2y_{14}+y_{13}\right) &= m_{14},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{16}-2y_{15}+y_{14}\right) &= m_{15},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{17}-2y_{16}+y_{15}\right) &= m_{16},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{18}-2y_{17}+y_{16}\right) &= m_{17},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{19}-2y_{18}+y_{17}\right) &= m_{18},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{20}-2y_{19}+y_{18}\right) &= m_{19},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{21}-2y_{20}+y_{19}\right) &= m_{20},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{22}-2y_{21}+y_{20}\right) &= m_{21},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{23}-2y_{22}+y_{21}\right) &= m_{22},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{24}-2y_{23}+y_{22}\right) &= m_{23},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{25}-2y_{24}+y_{23}\right) &= m_{24},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{26}-2y_{25}+y_{24}\right) &= m_{25},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{27}-2y_{26}+y_{25}\right) &= m_{26},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{28}-2y_{27}+y_{26}\right) &= m_{27},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{29}-2y_{28}+y_{27}\right) &= m_{28},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{30}-2y_{29}+y_{28}\right) &= m_{29},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{31}-2y_{30}+y_{29}\right) &= m_{30},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{32}-2y_{31}+y_{30}\right) &= m_{31},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{33}-2y_{32}+y_{31}\right) &= m_{32},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{34}-2y_{33}+y_{32}\right) &= m_{33},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{35}-2y_{34}+y_{33}\right) &= m_{34},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{36}-2y_{35}+y_{34}\right) &= m_{35},
\end{aligned}$$

con las condiciones:

$y_0=0,$

$y_1=\frac{1}{2}\cdot 0.25^2\cdot m_0\left(d\right),$

$y_{24}=0.$

Las soluciones de este sistema junto con el cálculo de los esfuerzos de corte y los giros de las secciones transversales en cada nodo de la discretización se muestran en la tabla 4.1 (que debe completarse con el valor de la reacción obtenido: $R=-14.2209$), mientras que en la figura 4.4 se representa gráficamente la solución junto con la ley de cargas.

x	descensos By		giros $B\theta = By'$		momentos $m = By''$		cortantes $t = By'''$	
	discretos	exactos	discretos	exactos	discretos	exactos	discretos	exactos
0.00	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	12.1122	12.1500	-14.7791	-14.7750
0.25	0.3785	0.3423	2.5935	2.5938	8.6361	8.6724	-13.0604	-13.0563
0.50	1.2968	1.2289	4.3708	4.3713	5.5820	5.6167	-11.4041	-11.4000
0.75	2.5639	2.4686	5.4353	5.4360	2.9341	2.9672	-9.8104	-9.8063
1.00	4.0144	3.8958	5.8867	5.8875	0.6768	0.7083	-8.2791	-8.2750
1.25	5.5072	5.3693	5.8206	5.8214	-1.2055	-1.1755	-6.8104	-6.8063
1.50	6.9247	6.7711	5.3288	5.3297	-2.7284	-2.7000	-5.4041	-5.4000
1.75	8.1717	8.0060	4.4994	4.5001	-3.9075	-3.8807	-4.0604	-4.0563
2.00	9.1744	9.0000	3.4161	3.4167	-4.7586	-4.7333	-2.7791	-2.7750
2.25	9.8797	9.6998	2.1591	2.1595	-5.2971	-5.2734	-1.5604	-1.5562
2.50	10.2539	10.0716	0.8047	0.8047	-5.5387	-5.5167	-0.4041	-0.4000
2.75	10.2820	10.1001	-0.5751	-0.5754	-5.4991	-5.4786	0.6896	0.6937
3.00	9.9664	9.7875	-1.9117	-1.9125	-5.1939	-5.1750	1.7209	1.7250
3.25	9.3262	9.1528	-3.1408	-3.1421	-4.6387	-4.6213	2.6896	2.6938
3.50	8.3960	8.2305	-4.2018	-4.2036	-3.8491	-3.8333	3.5959	3.6000
3.75	7.2253	7.0697	-5.0380	-5.0405	-2.8408	-2.8266	4.4396	4.4437
4.00	5.8770	5.7333	-5.5968	-5.6000	-1.6293	-1.6167	5.2209	5.2250
4.25	4.4269	4.2969	-5.8292	-5.8332	-0.2303	-0.2193	5.9396	5.9437
4.50	2.9624	2.8476	-5.6904	-5.6953	1.3405	1.3500	6.5959	6.6000
4.75	1.5817	1.4836	-5.1394	-5.1452	3.0676	3.0755	7.1896	7.1937
5.00	0.3927	0.3125	-4.1390	-4.1458	4.9354	4.9417	7.7209	7.7250
5.25	-0.4878	-0.5491	-2.6561	-2.6640	6.9281	6.9328	8.1896	8.1937
5.50	-0.9354	-0.9768	-0.6613	-0.6703	9.0302	9.0333	8.5959	8.6000
5.75	-0.8185	-0.8395	1.8707	1.8605	11.2260	11.2277	8.9396	8.9437
6.00^-	-0.0000	0.0000	4.9615	4.9500	13.5000	13.5000	9.2209	9.2250
6.00^+							-5.0000	-5.0000
6.25	1.6622	1.6465	8.1841	8.1714	12.2813	12.2812	-4.7500	-4.7500
6.50	4.0921	4.0609	11.1099	11.0958	11.1250	11.1250	-4.5000	-4.5000
6.75	7.2172	7.1710	13.7544	13.7391	10.0313	10.0312	-4.2500	-4.2500
7.00	10.9693	10.9083	16.1333	16.1167	9.0000	9.0000	-4.0000	-4.0000
7.25	15.2839	15.2085	18.2622	18.2443	8.0313	8.0312	-3.7500	-3.7500
7.50	20.1004	20.0109	20.1568	20.1375	7.1250	7.1250	-3.5000	-3.5000
7.75	25.3622	25.2590	21.8326	21.8120	6.2812	6.2812	-3.2500	-3.2500
8.00	31.0167	30.9000	23.3052	23.2833	5.5000	5.5000	-3.0000	-3.0000
8.25	37.0148	36.8850	24.5904	24.5672	4.7812	4.7812	-2.7500	-2.7500
8.50	43.3119	43.1693	25.7036	25.6792	4.1250	4.1250	-2.5000	-2.5000
8.75	49.8667	49.7116	26.6607	26.6349	3.5313	3.5312	-2.2500	-2.2500
9.00	56.6422	56.4750	27.4771	27.4500	3.0000	3.0000	-2.0000	-2.0000

Tabla 4.1

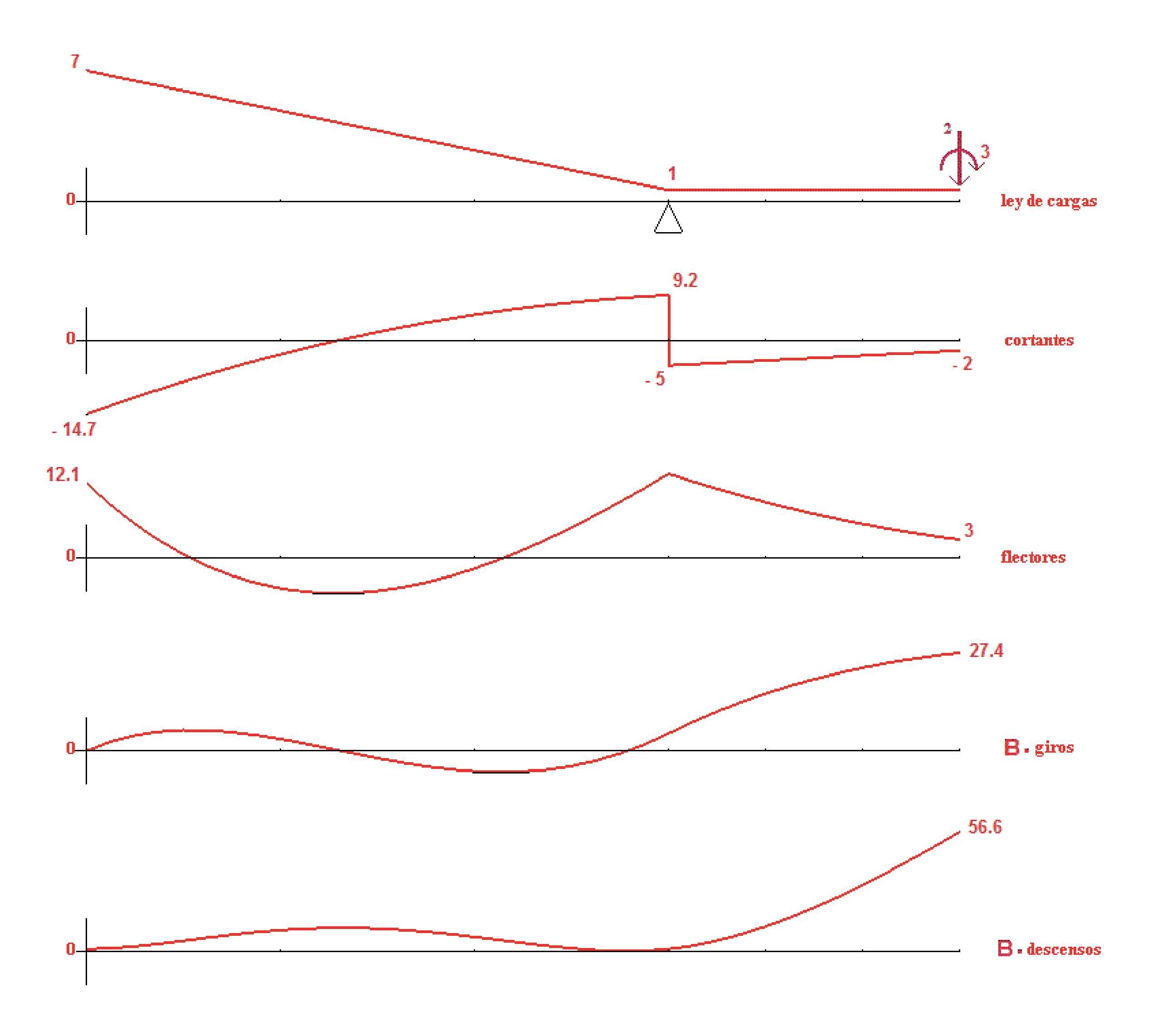

7
2
3
1
0
ley de cargas
9.2
0
cortantes
- 5
- 2
- 14.7
12.1
3
0
flectores
27.4
0
B . giros
56.6
0
B . descensos

Figura 4.4

4.1.2. Viga apoyada-empotrada con un apoyo rígido interior

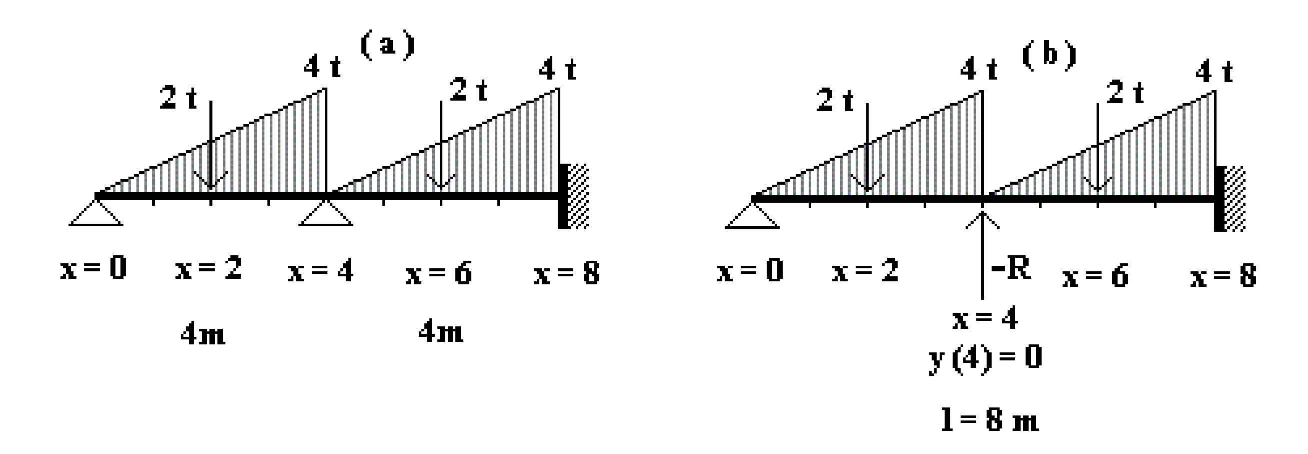


Figura 4.5

Se considera la viga de dos tramos de 4 m cada uno con un apoyo rígido en su extremo izquierdo y un empotramiento perfecto en el derecho. Las cargas continuas que solicitan cada tramo de la viga son cargas lineales que varían entre 0 y 4 t tal y como se representa en la figura 4.5(a), más una carga puntual de 2 t. en el punto medio de cada tramo. En la misma figura se representa la viga apoyada-empotrada equivalente de 8 m de longitud cargada con ondas triangulares en diente de sierra y las cargas concentradas de cada tramo más la reacción R adicional entre ambos. Se dispondrá, en este caso, de la condición adicional $y\,(4) = 0$.

El esquema de la figura 4.6 en el que hemos superpuesto al modelo una red de paso $h = 0.25$ nos permitirá plantear el sistema de ecuaciones correspondiente. Dicho sistema para sus dos

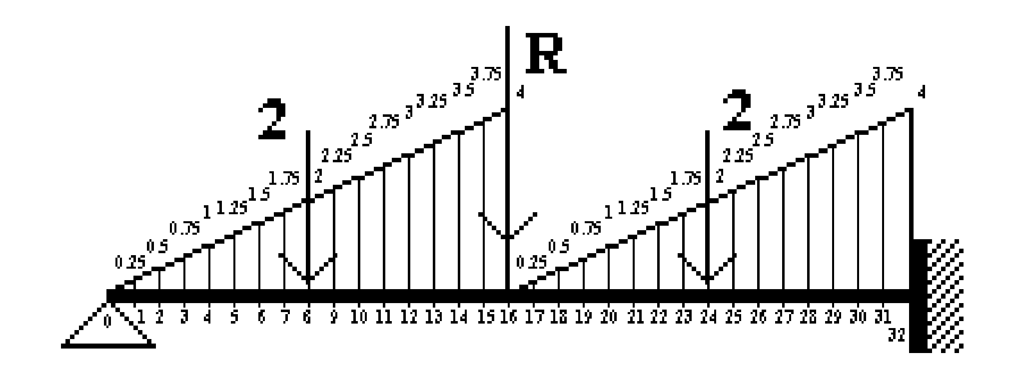


Figura 4.6

etapas será:

1ª etapa

$$
\begin{aligned}
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_2-2m_1+m_0\left(d\right)\right) &= 0.25,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_3-2m_2+m_1\right) &= 0.5,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_4-2m_3+m_2\right) &= 0.75,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_5-2m_4+m_3\right) &= 1,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_6-2m_5+m_4\right) &= 1.25,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_7-2m_6+m_5\right) &= 1.5,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_8-2m_7+m_6\right) &= 1.75,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_9-2m_8+m_7\right) &= 2+\tfrac{2}{0.25},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{10}-2m_9+m_8\right) &= 2.25,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{11}-2m_{10}+m_9\right) &= 2.5,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{12}-2m_{11}+m_{10}\right) &= 2.75,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{13}-2m_{12}+m_{11}\right) &= 3,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{14}-2m_{13}+m_{12}\right) &= 3.25,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{15}-2m_{14}+m_{13}\right) &= 3.5,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{16}-2m_{15}+m_{14}\right) &= 3.75,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{17}-2m_{16}+m_{15}\right) &= 2+\tfrac{R}{0.25},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{18}-2m_{17}+m_{16}\right) &= 0.25,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{19}-2m_{18}+m_{17}\right) &= 0.5,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{20}-2m_{19}+m_{18}\right) &= 0.75,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{21}-2m_{20}+m_{19}\right) &= 1,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{22}-2m_{21}+m_{20}\right) &= 1.25,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{23}-2m_{22}+m_{21}\right) &= 1.5,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{24}-2m_{23}+m_{22}\right) &= 1.75,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{25}-2m_{24}+m_{23}\right) &= 2+\tfrac{2}{0.25},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{26}-2m_{25}+m_{24}\right) &= 2.25,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{27}-2m_{26}+m_{25}\right) &= 2.5,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{28}-2m_{27}+m_{26}\right) &= 2.75,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{29}-2m_{28}+m_{27}\right) &= 3,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{30}-2m_{29}+m_{28}\right) &= 3.25,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{31}-2m_{30}+m_{29}\right) &= 3.5,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{32}\left(i\right)-2m_{31}+m_{30}\right) &= 3.75,
\end{aligned}
$$

con las condiciones:

$m_0\left(d\right)=0,$

2ª etapa

$$
\begin{aligned}
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_2-2y_1+y_0\right) &= m_1,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_3-2y_2+y_1\right) &= m_2,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_4-2y_3+y_2\right) &= m_3,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_5-2y_4+y_3\right) &= m_4,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_6-2y_5+y_4\right) &= m_5,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_7-2y_6+y_5\right) &= m_6,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_8-2y_7+y_6\right) &= m_7,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_9-2y_8+y_7\right) &= m_8,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{10}-2y_9+y_8\right) &= m_9,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{11}-2y_{10}+y_9\right) &= m_{10},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{12}-2y_{11}+y_{10}\right) &= m_{11},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{13}-2y_{12}+y_{11}\right) &= m_{12},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{14}-2y_{13}+y_{12}\right) &= m_{13},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{15}-2y_{14}+y_{13}\right) &= m_{14},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{16}-2y_{15}+y_{14}\right) &= m_{15},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{17}-2y_{16}+y_{15}\right) &= m_{16},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{18}-2y_{17}+y_{16}\right) &= m_{17},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{19}-2y_{18}+y_{17}\right) &= m_{18},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{20}-2y_{19}+y_{18}\right) &= m_{19},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{21}-2y_{20}+y_{19}\right) &= m_{20},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{22}-2y_{21}+y_{20}\right) &= m_{21},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{23}-2y_{22}+y_{21}\right) &= m_{22},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{24}-2y_{23}+y_{22}\right) &= m_{23},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{25}-2y_{24}+y_{23}\right) &= m_{24},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{26}-2y_{25}+y_{24}\right) &= m_{25},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{27}-2y_{26}+y_{25}\right) &= m_{26},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{28}-2y_{27}+y_{26}\right) &= m_{27},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{29}-2y_{28}+y_{27}\right) &= m_{28},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{30}-2y_{29}+y_{28}\right) &= m_{29},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{31}-2y_{30}+y_{29}\right) &= m_{30},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{32}-2y_{31}+y_{30}\right) &= m_{31},
\end{aligned}
$$

con las condiciones:

$y_0=0,$

$y_{16}=0,$

$y_{31}=\frac{1}{2}\cdot 0.25^2\cdot m_{32}\left(i\right),$

$y_{32}=0.$

y sus soluciones junto con los esfuerzos de corte y los giros de las secciones transversales en cada uno de los nodos se muestran en la tabla 4.6 y en la figura 4.7. En este caso, el valor de la reacción obtenido es $R=-11.4499$.

x	descensos By		giros $B\theta = By'$		momentos $m = By''$		cortantes $t = By'''$	
	discretos	exactos	discretos	exactos	discretos	exactos	discretos	exactos
0.00	0.0000	0.0000	3.8965	3.8857	0.0000	0.0000	-2.5015	-2.5071
0.25	0.9741	0.9649	3.8184	3.8075	-0.6254	-0.6242	-2.4702	-2.4759
0.50	1.9092	1.8909	3.5858	3.5749	-1.2351	-1.2327	-2.3765	-2.3821
0.75	2.7670	2.7400	3.2047	3.1938	-1.8136	-1.8100	-2.2202	-2.2259
1.00	3.5115	3.4762	2.6848	2.6738	-2.3452	-2.3405	-2.0015	-2.0071
1.25	4.1095	4.0664	2.0399	2.0287	-2.8144	-2.8084	-1.7202	-1.7259
1.50	4.5315	4.4816	1.2874	1.2761	-3.2054	-3.1982	-1.3765	-1.3821
1.75	4.7532	4.6973	0.4489	0.4374	-3.5026	-3.4943	-0.9702	-0.9759
2.00^-	4.7559	4.6952	-0.2313	-0.4619	-3.6905	-3.6810	-0.5015	-0.5071
2.00^+							1.4985	1.4929
2.25	4.5281	4.4690	-1.3182	-1.3301	-3.2533	-3.2426	2.0298	2.0241
2.50	4.0969	4.0407	-2.0593	-2.0715	-2.6756	-2.6637	2.6235	2.6179
2.75	3.4984	3.4468	-2.6364	-2.6489	-1.9416	-1.9285	3.2798	3.2741
3.00	2.7786	2.7333	-3.0086	-3.0214	-1.0357	-1.0214	3.9985	3.9929
3.25	1.9941	1.9569	-3.1309	-3.1440	0.0577	0.0731	4.7798	4.7741
3.50	1.2132	1.1862	-2.9544	-2.9679	1.3542	1.3708	5.6235	5.6179
3.75	0.5169	0.5023	-2.4264	-2.4404	2.8694	2.8873	6.5298	6.5241
4.00^-	0.0000	0.0000	-1.4904	-1.5048	4.6191	4.6381	7.4985	7.4929
4.00^+							-3.9514	-3.9643
4.25	-0.2282	-0.2416	-0.4591	-0.4689	3.6312	3.6496	-3.9201	-3.9330
4.50	-0.2295	-0.2549	0.3272	0.3214	2.6590	2.6768	-3.8264	-3.8393
4.75	-0.0646	-0.1009	0.8743	0.8720	1.7180	1.7352	-3.6701	-3.6830
5.00	0.2076	0.1619	1.1921	1.1928	0.8239	0.8405	-3.4514	-3.4643
5.25	0.5314	0.4775	1.2941	1.2975	-0.0076	0.0083	-3.1701	-3.1830
5.50	0.8547	0.7941	1.1980	1.2035	-0.7611	-0.7458	-2.8264	-2.8393
5.75	1.1304	1.0645	0.9253	0.9324	-1.4208	-1.4062	-2.4201	-2.4330
6.00^-	1.3173	1.2476	0.5901	0.5095	-1.9712	-1.9571	-1.9514	-1.9643
6.00^+							0.0486	0.0357
6.25	1.3810	1.3143	0.0178	0.0267	-1.8965	-1.8831	0.5799	0.5670
6.50	1.3262	1.2639	-0.4294	-0.4203	-1.6812	-1.6684	1.1736	1.1607
6.75	1.1663	1.1102	-0.8033	-0.7945	-1.3097	-1.2975	1.8299	1.8170
7.00	0.9246	0.8762	-1.0627	-1.0548	-0.7663	-0.7548	2.5486	2.5357
7.25	0.6350	0.5960	-1.1629	-1.1562	-0.0354	-0.0245	3.3299	3.3170
7.50	0.3431	0.3154	-1.0550	-1.0501	0.8987	0.9089	4.1736	4.1607
7.75	0.1075	0.0927	-0.6863	-0.6835	2.0515	2.0611	5.0799	5.0670
8.00	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	3.4386	3.4476	6.0486	6.0357

Tabla 4.2

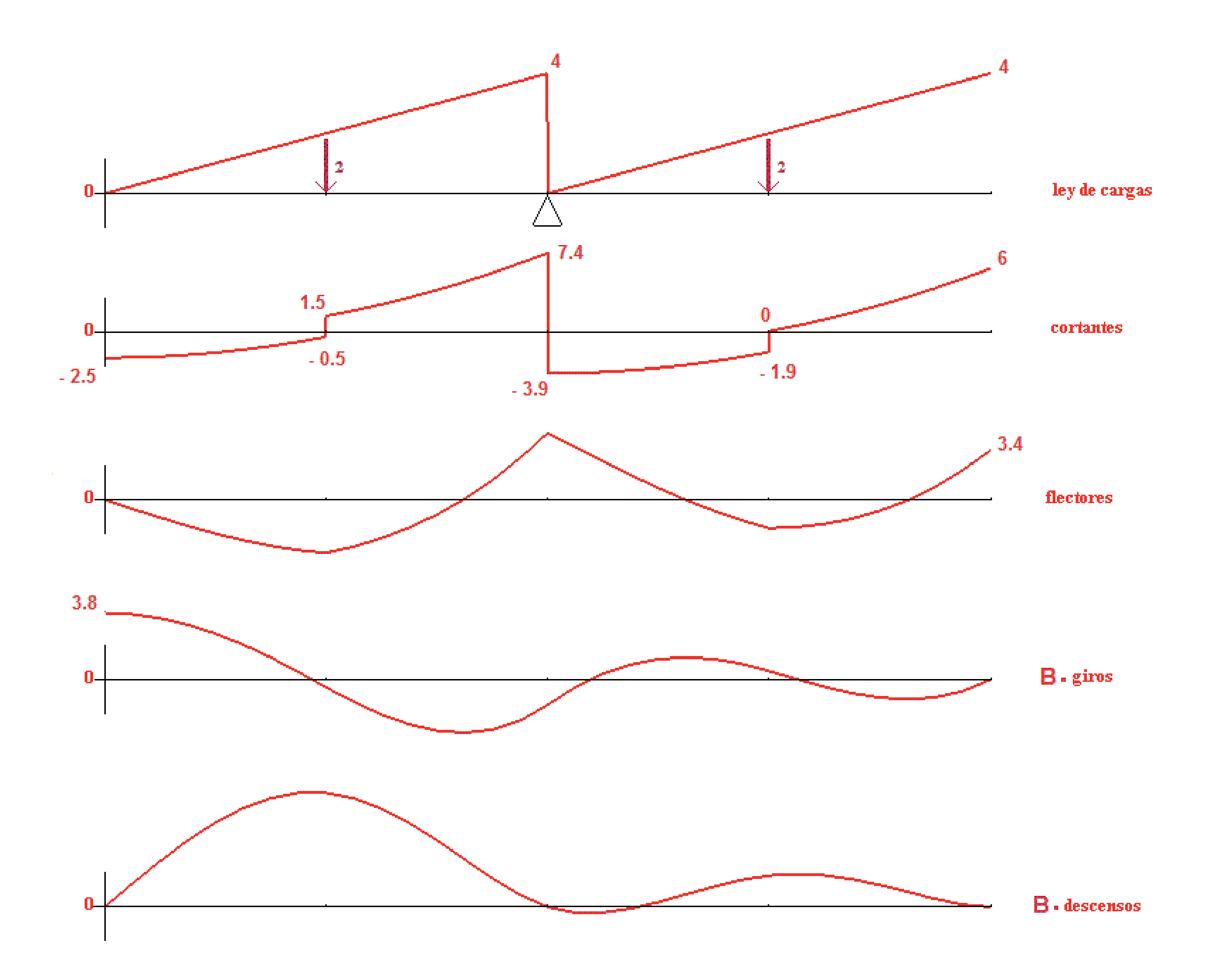

4
4
2
2
0
ley de cargas
7.4
6
1.5
0
0
cortantes
- 2.5
- 0.5
- 3.9
- 1.9
3.4
0
flectores
3.8
0
B . giros
0
B . descensos

Figura 4.7

4.1.3. Viga doblemente empotrada con tres apoyos rígidos interiores

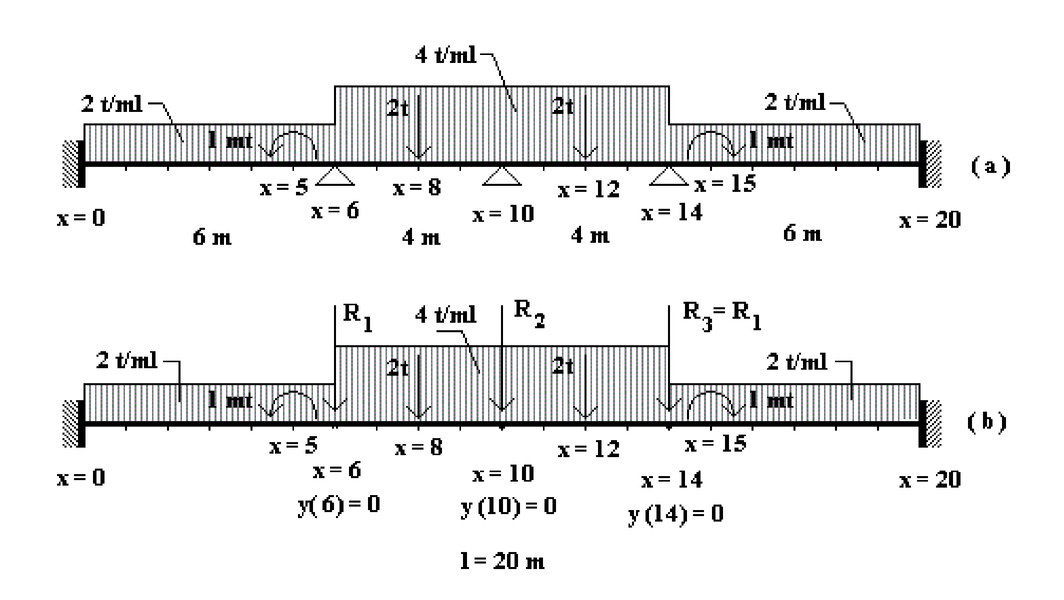


Figura 4.8

Consideramos aquí la viga continua de 20 m de cuatro tramos con dos empotramientos perfectos en sus extremos y simetría de cargas y forma respecto del apoyo interior central tal y como se muestra en la figura 4.8(a). Las cargas continuas que solicitan cada tramo de la viga son cargas uniformes de 2 t /m y 4 t /m más dos cargas concentradas y dos momentos de flexión aislados en los puntos señalados. En la figura 4.8(b) se representa la viga empotrada-empotrada equivalente con las reacciones R_1 (igual a R_3 por simetría) y R_2. Se utilizarán únicamenete, en este caso, las condiciones adicionales $y\,(6) = 0$ e $y\,(10) = 0$.

El esquema de la figura 4.9, en el que hemos superpuesto a la viga continua una red de paso $h = 0.25$, nos permitirá plantear el sistema de ecuaciones correspondiente imponiendo en este caso las condiciones de simetría lo que nos reduce sensiblemente el número de ecuaciones.

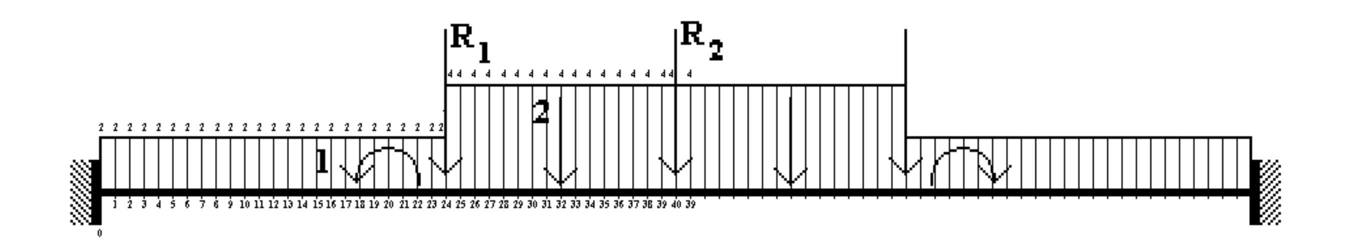


Figura 4.9

El sistema de ecuaciones en sus dos etapas quedará:

1ª etapa

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_2-2m_1+m_0\left(d\right)\right) &= 2,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_3-2m_2+m_1\right) &= 2,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_4-2m_3+m_2\right) &= 2,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_5-2m_4+m_3\right) &= 2,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_6-2m_5+m_4\right) &= 2,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_7-2m_6+m_5\right) &= 2,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_8-2m_7+m_6\right) &= 2,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_9-2m_8+m_7\right) &= 2,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{10}-2m_9+m_8\right) &= 2,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{11}-2m_{10}+m_9\right) &= 2,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{12}-2m_{11}+m_{10}\right) &= 2,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{13}-2m_{12}+m_{11}\right) &= 2,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{14}-2m_{13}+m_{12}\right) &= 2,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{15}-2m_{14}+m_{13}\right) &= 2,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{16}-2m_{15}+m_{14}\right) &= 2,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{17}-2m_{16}+m_{15}\right) &= 2,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{18}-2m_{17}+m_{16}\right) &= 2,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{19}-2m_{18}+m_{17}\right) &= 2,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{20}\left(i\right)-2m_{19}+m_{18}\right) &= 2,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{21}-2m_{20}\left(i\right)+m_{19}\right) &= 2+\tfrac{1}{0.25^2},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{22}-2m_{21}+m_{20}\left(d\right)\right) &= 2,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{23}-2m_{22}+m_{21}\right) &= 2,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{24}-2m_{23}+m_{22}\right) &= 2,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{25}-2m_{24}+m_{23}\right) &= 3+\tfrac{R_1}{0.25},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{26}-2m_{25}+m_{24}\right) &= 4,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{27}-2m_{26}+m_{25}\right) &= 4,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{28}-2m_{27}+m_{26}\right) &= 4,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{29}-2m_{28}+m_{27}\right) &= 4,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{30}-2m_{29}+m_{28}\right) &= 4,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{31}-2m_{30}+m_{29}\right) &= 4,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{32}-2m_{31}+m_{30}\right) &= 4,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{33}-2m_{32}+m_{31}\right) &= 4+\tfrac{2}{0.25},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{34}-2m_{33}+m_{32}\right) &= 4,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{35}-2m_{34}+m_{33}\right) &= 4,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{36}-2m_{35}+m_{34}\right) &= 4,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{37}-2m_{36}+m_{35}\right) &= 4,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{38}-2m_{37}+m_{36}\right) &= 4,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{39}-2m_{38}+m_{37}\right) &= 4,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{40}-2m_{39}+m_{38}\right) &= 4,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{41}\left(i\right)-2m_{40}+m_{39}\right) &= 4+\tfrac{R_2}{0.25},
\end{aligned}$$

con las condiciones:

$m_{20}\left(d\right)=m_{20}\left(i\right)+1$

2ª etapa

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_2-2y_1+y_0\right) &= m_1,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_3-2y_2+y_1\right) &= m_2,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_4-2y_3+y_2\right) &= m_3,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_5-2y_4+y_3\right) &= m_4,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_6-2y_5+y_4\right) &= m_5,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_7-2y_6+y_5\right) &= m_6,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_8-2y_7+y_6\right) &= m_7,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_9-2y_8+y_7\right) &= m_8,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{10}-2y_9+y_8\right) &= m_9,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{11}-2y_{10}+y_9\right) &= m_{10},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{12}-2y_{11}+y_{10}\right) &= m_{11},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{13}-2y_{12}+y_{11}\right) &= m_{12},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{14}-2y_{13}+y_{12}\right) &= m_{13},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{15}-2y_{14}+y_{13}\right) &= m_{14},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{16}-2y_{15}+y_{14}\right) &= m_{15},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{17}-2y_{16}+y_{15}\right) &= m_{16},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{18}-2y_{17}+y_{16}\right) &= m_{17},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{19}-2y_{18}+y_{17}\right) &= m_{18},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{20}-2y_{19}+y_{18}\right) &= m_{19},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{21}-2y_{20}+y_{19}\right) &= m_{20}\left(i\right)+\tfrac{1}{2},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{22}-2y_{21}+y_{20}\right) &= m_{21},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{23}-2y_{22}+y_{21}\right) &= m_{22},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{24}-2y_{23}+y_{22}\right) &= m_{23},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{25}-2y_{24}+y_{23}\right) &= m_{24},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{26}-2y_{25}+y_{24}\right) &= m_{25},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{27}-2y_{26}+y_{25}\right) &= m_{26},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{28}-2y_{27}+y_{26}\right) &= m_{27},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{29}-2y_{28}+y_{27}\right) &= m_{28},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{30}-2y_{29}+y_{28}\right) &= m_{29},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{31}-2y_{30}+y_{29}\right) &= m_{30},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{32}-2y_{31}+y_{30}\right) &= m_{31},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{33}-2y_{32}+y_{31}\right) &= m_{32},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{34}-2y_{33}+y_{32}\right) &= m_{33},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{35}-2y_{34}+y_{33}\right) &= m_{34},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{36}-2y_{35}+y_{34}\right) &= m_{35},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{37}-2y_{36}+y_{35}\right) &= m_{36},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{38}-2y_{37}+y_{36}\right) &= m_{37},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{39}-2y_{38}+y_{37}\right) &= m_{38},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{40}-2y_{39}+y_{38}\right) &= m_{39},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{41}-2y_{40}+y_{39}\right) &= m_{40},
\end{aligned}$$

con las condiciones:

$y_0=0,$
$y_1=\tfrac{1}{2}\cdot 0.25^2\cdot m_0\left(d\right),$
$y_{24}=0,$
$y_{40}=0.$

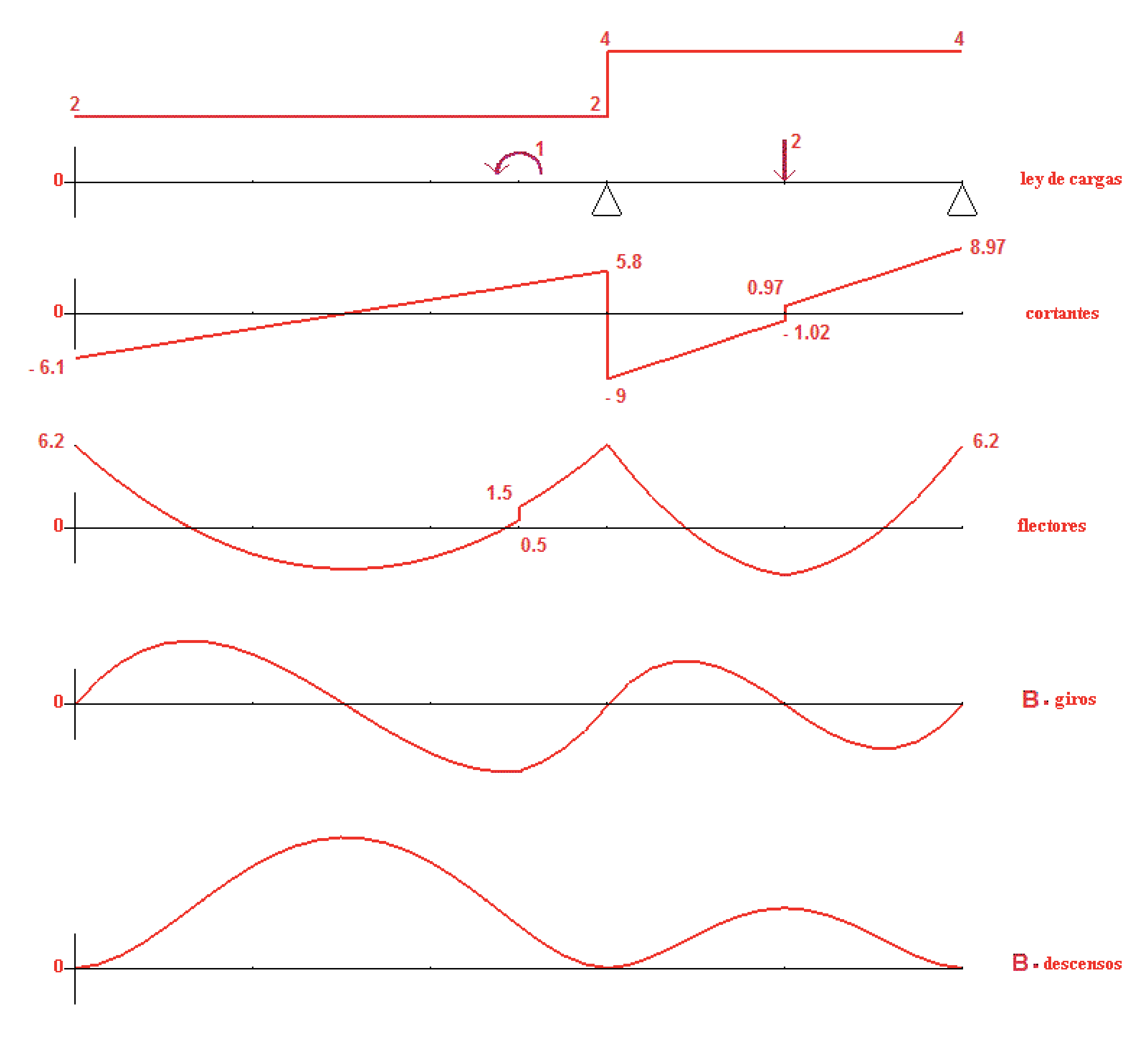


Figura 4.10

cuyas soluciones se muestran en la tabla 4.3 junto con la reconstrucción a partir de estos valores de los esfuerzos de corte y los giros de las secciones transversales que se obtienen teniendo en cuenta las expresiones de la tabla 3.4. En la figura 4.10 se puede ver la representación gráfica de las cuatro funciones junto con la ley de cargas. Las reacciones obtenidas en este caso son: $R_1 = -14.8734$ y $R_2 = -17.9573$.

x	descensos By		giros $B\theta = By'$		momentos $m = By''$		cortantes $t = By'''$	
	discretos	exactos	discretos	exactos	discretos	exactos	discretos	exactos
0.00	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	6.2572	6.2500	-6.1479	-6.1389
0.25	0.1955	0.1797	1.3800	1.3759	4.7827	4.7778	-5.6479	-5.6389
0.50	0.6900	0.6586	2.4070	2.3993	3.4332	3.4306	-5.1479	-5.1389
0.75	1.3990	1.3525	3.1122	3.1016	2.2087	2.2083	-4.6479	-4.6389
1.00	2.2461	2.1852	3.5269	3.5139	1.1092	1.1111	-4.1479	-4.1389
1.25	3.1625	3.0879	3.6824	3.6675	0.1347	0.1389	-3.6479	-3.6389
1.50	4.0873	4.0000	3.6099	3.5938	-0.7147	-0.7083	-3.1479	-3.1389
1.75	4.9675	4.8685	3.3407	3.3238	-1.4392	-1.4305	-2.6479	-2.6389
2.00	5.7577	5.6481	2.9060	2.8889	-2.0387	-2.0278	-2.1479	-2.1389
2.25	6.4204	6.3018	2.3370	2.3203	-2.5132	-2.5000	-1.6479	-1.6389
2.50	6.9262	6.7998	1.6650	1.6493	-2.8627	-2.8472	-1.1479	-1.1389
2.75	7.2529	7.1205	0.9213	0.9071	-3.0872	-3.0694	-0.6479	-0.6389
3.00	7.3868	7.2500	0.1370	0.1250	-3.1866	-3.1667	-0.1479	-0.1389
3.25	7.3215	7.1823	-0.6564	-0.6658	-3.1611	-3.1389	0.3521	0.3611
3.50	7.0586	6.9190	-1.4279	-1.4340	-3.0106	-2.9861	0.8521	0.8611
3.75	6.6075	6.4697	-2.1461	-2.1484	-2.7351	-2.7083	1.3521	1.3611
4.00	5.9855	5.8519	-2.7798	-2.7778	-2.3346	-2.3056	1.8521	1.8611
4.25	5.2176	5.0905	-3.2978	-3.2908	-1.8091	-1.7778	2.3521	2.3611
4.50	4.3366	4.2188	-3.6687	-3.6562	-1.1586	-1.1250	2.8521	2.8611
4.75	3.3832	3.2773	-3.8614	-3.8429	-0.3830	-0.3472	3.3521	3.3611
5.00^-	2.4059	2.3148	-3.8446	-3.8194	0.5175	0.5555	3.8521	3.8611
5.00^+					1.5175	1.5555		
5.25	1.4921	1.4189	-3.3371	-3.3047	2.5430	2.5833	4.3521	4.3611
5.50	0.7373	0.6852	-2.5575	-2.5174	3.6935	3.7361	4.8521	4.8611
5.75	0.2134	0.1856	-1.4747	-1.4262	4.9690	5.0139	5.3521	5.3611
6.00^-	0.0000	0.0000	-0.0574	0.0000	6.3695	6.4167	5.8521	5.8611
6.00^+							-9.0213	-9.0417
6.25	0.1847	0.1776	1.2687	1.3320	4.2392	4.2812	-8.0213	-8.0417
6.50	0.6344	0.6241	2.0935	2.1614	2.3589	2.3958	-7.0213	-7.0417
6.75	1.2314	1.2217	2.4794	2.5508	0.7285	0.7604	-6.0213	-6.0417
7.00	1.8741	1.8681	2.4890	2.5625	-0.6518	-0.6250	-5.0213	-5.0417
7.25	2.4759	2.4767	2.1847	2.2591	-1.7821	-1.7604	-4.0213	-4.0417
7.50	2.9664	2.9766	1.6292	1.7031	-2.6625	-2.6458	-3.0213	-3.0417
7.75	3.2905	3.3124	0.8848	0.9570	-3.2928	-3.2812	-2.0213	-2.0417
8.00^-	3.4088	3.4444	0.0140	0.0833	-3.6732	-3.6667	-1.0213	-1.0417
8.00^+							0.9787	0.9583
8.25	3.2975	3.3538	-0.8581	-0.7930	-3.3035	-3.3021	1.9787	1.9583
8.50	2.9798	3.0582	-1.6065	-1.5469	-2.6838	-2.6875	2.9787	2.9583
8.75	2.4943	2.5958	-2.1687	-2.1159	-1.8142	-1.8229	3.9787	3.9583
9.00	1.8954	2.0208	-2.4823	-2.4375	-0.6945	-0.7083	4.9787	4.9583
9.25	1.2531	1.4029	-2.4847	-2.4492	0.6752	0.6562	5.9787	5.9583
9.50	0.6530	0.8273	-2.1135	-2.0885	2.2948	2.2708	6.9787	6.9583
9.75	0.1964	0.3949	-1.3061	-1.2930	4.1645	4.1354	7.9787	7.9583
10.00^-	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	6.2841	6.2500	8.9787	8.9583
10.00^+							-8.9787	-8.9583

Tabla 4.3

4.2. Modelos complementarios para los voladizos en vigas

La extensión a las vigas de varios tramos nos permite considerar, si se quiere, tres nuevos modelos de vigas a las que deberán ser reducidas otros tantos modelos con voladizos en uno de sus extremos o en ambos. Esto es: podríamos incorporar los modelos de vigas libre-apoyada, apoyada-libre y libre-libre en la hipótesis de que se trata de vigas continuas con apoyos rígidos interiores.

A efectos de los momentos flectores y, consecuentemente, a efectos de los esfuerzos de corte, puede procederse como se hace usualmente en la teoría estructural de las vigas, substituyendo el voladizo por su contribución al resto de la viga continua solicitando su apoyo más próximo por el correspondiente momento de empotramiento de la ménsula. Este procedimiento deja fuera el análisis de los desplazamientos y de los giros de las secciones transversales para los que debe de preverse un modelo complementario de segmento de viga con las condiciones de vínculo entre la ménsula y el resto de la viga continua figura 4.11.

En términos de diferencias finitas el problema, sin embargo, resulta mucho más sencillo. Basta incluir entre las vigas de un solo tramo los modelos apoyada-libre, libre-apoyada y libre-libre siempre que, como se ha dicho, estas estructuras tengan respuesta de viga y por lo tanto derivadas de vigas de varios tramos. El procedimiento es del todo semejante al realizado en el apartado anterior § 4.1, substituyendo los apoyos rígidos interiores por cargas puntuales desconocidas y emplear a continuación, sin más, las ecuaciones y condiciones adecuadas.

Los siguientes ejemplos muestran el procedimiento en los tres nuevos casos contemplados.



Figura 4.11

4.2.1. Viga apoyada-libre

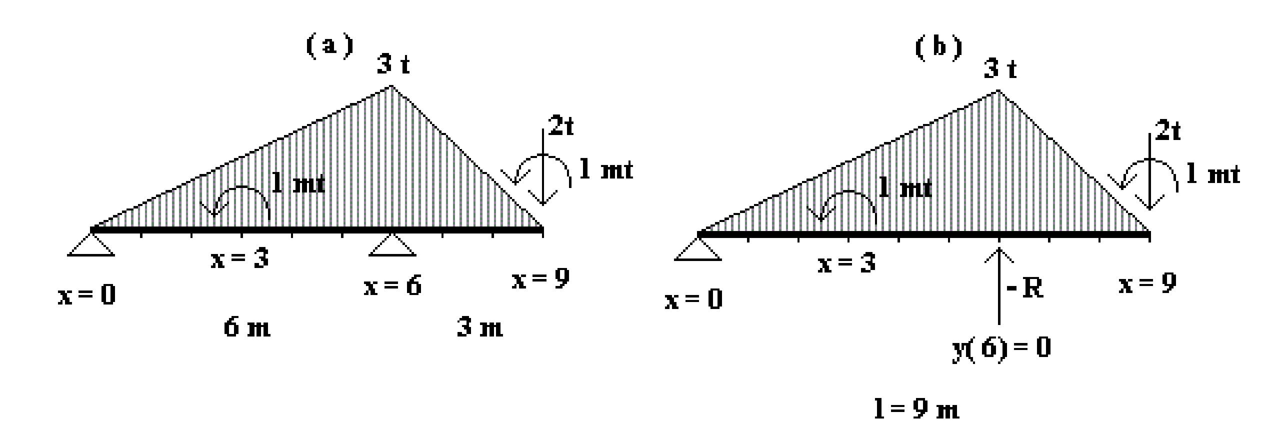


Figura 4.12

En la figura 4.12(a) se representa una viga doblemente apoyada de 6 m con voladizo en su extremo derecho de 3 m y su equivalente, figura 4.12(b), substituyendo el apoyo interior por una reacción R más la condición de descenso nulo. En la figura 4.13 se ha superpuesto una red de paso $h = 0.25$ sobre la que se establece el sistema de ecuaciones correspondiente a sus dos etapas. A causa de la reacción R desconocida el sistema debe de ser calculado conjuntamente en sus dos etapas.

1ª etapa

$$\begin{aligned}
\frac{1}{0.25^2}\left(m_2 - 2m_1 + m_0\left(d\right)\right) &= 0.125,\\
\frac{1}{0.25^2}\left(m_3 - 2m_2 + m_1\right) &= 0.25,\\
\frac{1}{0.25^2}\left(m_4 - 2m_3 + m_2\right) &= 0.375,\\
\frac{1}{0.25^2}\left(m_5 - 2m_4 + m_3\right) &= 0.5,\\
\frac{1}{0.25^2}\left(m_6 - 2m_5 + m_4\right) &= 0.625,\\
\frac{1}{0.25^2}\left(m_7 - 2m_6 + m_5\right) &= 0.75,
\end{aligned}$$

2ª etapa

$$\begin{aligned}
\frac{1}{0.25^2}\left(y_2 - 2y_1 + y_0\right) &= m_1,\\
\frac{1}{0.25^2}\left(y_3 - 2y_2 + y_1\right) &= m_2,\\
\frac{1}{0.25^2}\left(y_4 - 2y_3 + y_2\right) &= m_3,\\
\frac{1}{0.25^2}\left(y_5 - 2y_4 + y_3\right) &= m_4,\\
\frac{1}{0.25^2}\left(y_6 - 2y_5 + y_4\right) &= m_5,\\
\frac{1}{0.25^2}\left(y_7 - 2y_6 + y_5\right) &= m_6,
\end{aligned}$$

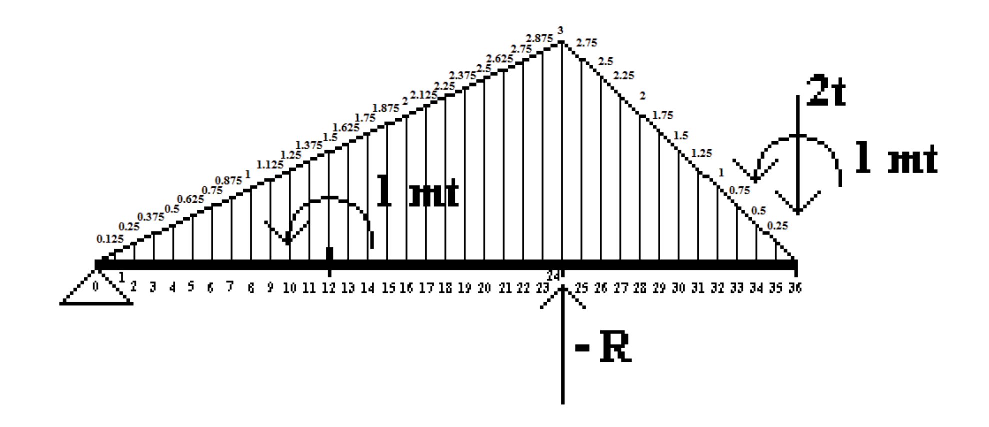


Figura 4.13

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{0.25^2}(m_8-2m_7+m_6) &= 0.875,\\
\tfrac{1}{0.25^2}(m_9-2m_8+m_7) &= 1,\\
\tfrac{1}{0.25^2}(m_{10}-2m_9+m_8) &= 1.125,\\
\tfrac{1}{0.25^2}(m_{11}-2m_{10}+m_9) &= 1.25,\\
\tfrac{1}{0.25^2}(m_{12}(i)-2m_{11}+m_{10}) &= 1.375,\\
\tfrac{1}{0.25^2}(m_{13}-2m_{12}(i)+m_{11}) &= 1.5+\tfrac{1}{0.25^2},\\
\tfrac{1}{0.25^2}(m_{14}-2m_{13}+m_{12}(d)) &= 1.625,\\
\tfrac{1}{0.25^2}(m_{15}-2m_{14}+m_{13}) &= 1.75,\\
\tfrac{1}{0.25^2}(m_{16}-2m_{15}+m_{14}) &= 1.875,\\
\tfrac{1}{0.25^2}(m_{17}-2m_{16}+m_{15}) &= 2,\\
\tfrac{1}{0.25^2}(m_{18}-2m_{17}+m_{16}) &= 2.125,\\
\tfrac{1}{0.25^2}(m_{19}-2m_{18}+m_{17}) &= 2.25,\\
\tfrac{1}{0.25^2}(m_{20}-2m_{19}+m_{18}) &= 2.375,\\
\tfrac{1}{0.25^2}(m_{21}-2m_{20}+m_{19}) &= 2.5,\\
\tfrac{1}{0.25^2}(m_{22}-2m_{21}+m_{20}) &= 2.625,\\
\tfrac{1}{0.25^2}(m_{23}-2m_{22}+m_{21}) &= 2.75,\\
\tfrac{1}{0.25^2}(m_{24}-2m_{23}+m_{22}) &= 2.875,\\
\tfrac{1}{0.25^2}(m_{25}-2m_{24}+m_{23}) &= 3+\tfrac{R}{0.25},\\
\tfrac{1}{0.25^2}(m_{26}-2m_{25}+m_{24}) &= 2.75,\\
\tfrac{1}{0.25^2}(m_{27}-2m_{26}+m_{25}) &= 2.5,\\
\tfrac{1}{0.25^2}(m_{28}-2m_{27}+m_{26}) &= 2.25,\\
\tfrac{1}{0.25^2}(m_{29}-2m_{28}+m_{27}) &= 2,\\
\tfrac{1}{0.25^2}(m_{30}-2m_{29}+m_{28}) &= 1.75,\\
\tfrac{1}{0.25^2}(m_{31}-2m_{30}+m_{29}) &= 1.5,\\
\tfrac{1}{0.25^2}(m_{32}-2m_{31}+m_{30}) &= 1.25,\\
\tfrac{1}{0.25^2}(m_{33}-2m_{32}+m_{31}) &= 1,\\
\tfrac{1}{0.25^2}(m_{34}-2m_{33}+m_{32}) &= 0.75,\\
\tfrac{1}{0.25^2}(m_{35}-2m_{34}+m_{33}) &= 0.5,\\
\tfrac{1}{0.25^2}(m_{36}(i)-2m_{35}+m_{34}) &= 0.25,
\end{aligned}$$

con las condiciones:
$m_0(d)=0,$
$m_{12}(d)=m_{12}(i)+1,$
$m_{35}=0.25\cdot 2-1,$
$m_{36}(i)=-1,$

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{0.25^2}(y_8-2y_7+y_6) &= m_7,\\
\tfrac{1}{0.25^2}(y_9-2y_8+y_7) &= m_8,\\
\tfrac{1}{0.25^2}(y_{10}-2y_9+y_8) &= m_9,\\
\tfrac{1}{0.25^2}(y_{11}-2y_{10}+y_9) &= m_{10},\\
\tfrac{1}{0.25^2}(y_{12}-2y_{11}+y_{10}) &= m_{11},\\
\tfrac{1}{0.25^2}(y_{13}-2y_{12}+y_{11}) &= m_{12}(i)+\tfrac{1}{2},\\
\tfrac{1}{0.25^2}(y_{14}-2y_{13}+y_{12}) &= m_{13},\\
\tfrac{1}{0.25^2}(y_{15}-2y_{14}+y_{13}) &= m_{14},\\
\tfrac{1}{0.25^2}(y_{16}-2y_{15}+y_{14}) &= m_{15},\\
\tfrac{1}{0.25^2}(y_{17}-2y_{16}+y_{15}) &= m_{16},\\
\tfrac{1}{0.25^2}(y_{18}-2y_{17}+y_{16}) &= m_{17},\\
\tfrac{1}{0.25^2}(y_{19}-2y_{18}+y_{17}) &= m_{18},\\
\tfrac{1}{0.25^2}(y_{20}-2y_{19}+y_{18}) &= m_{19},\\
\tfrac{1}{0.25^2}(y_{21}-2y_{20}+y_{19}) &= m_{20},\\
\tfrac{1}{0.25^2}(y_{22}-2y_{21}+y_{20}) &= m_{21},\\
\tfrac{1}{0.25^2}(y_{23}-2y_{22}+y_{21}) &= m_{22},\\
\tfrac{1}{0.25^2}(y_{24}-2y_{23}+y_{22}) &= m_{23},\\
\tfrac{1}{0.25^2}(y_{25}-2y_{24}+y_{23}) &= m_{24},\\
\tfrac{1}{0.25^2}(y_{26}-2y_{25}+y_{24}) &= m_{25},\\
\tfrac{1}{0.25^2}(y_{27}-2y_{26}+y_{25}) &= m_{26},\\
\tfrac{1}{0.25^2}(y_{28}-2y_{27}+y_{26}) &= m_{27},\\
\tfrac{1}{0.25^2}(y_{29}-2y_{28}+y_{27}) &= m_{28},\\
\tfrac{1}{0.25^2}(y_{30}-2y_{29}+y_{28}) &= m_{29},\\
\tfrac{1}{0.25^2}(y_{31}-2y_{30}+y_{29}) &= m_{30},\\
\tfrac{1}{0.25^2}(y_{32}-2y_{31}+y_{30}) &= m_{31},\\
\tfrac{1}{0.25^2}(y_{33}-2y_{32}+y_{31}) &= m_{32},\\
\tfrac{1}{0.25^2}(y_{34}-2y_{33}+y_{32}) &= m_{33},\\
\tfrac{1}{0.25^2}(y_{35}-2y_{34}+y_{33}) &= m_{34},\\
\tfrac{1}{0.25^2}(y_{36}-2y_{35}+y_{34}) &= m_{35},
\end{aligned}$$

con las condiciones:
$y_0=0,$
$y_{24}=0.$

cuyas solución se muestra en la tabla 4.4 (que hay que completar con el valor de la reacción $R=-13.9167$) y en la figura 4.14 junto con los cortantes y giros de las secciones transversales que se calculan con las fórmulas de la tabla 3.4.

x	descensos By		giros $B\theta = By'$		momentos $m = By''$		cortantes $t = By'''$	
	discretos	exactos	discretos	exactos	discretos	exactos	discretos	exactos
0.00	0.0000	0.0000	3.3803	3.3500	0.0000	0.0000	-1.5833	-1.5833
0.25	0.8451	0.8334	3.3308	3.3006	-0.3958	-0.3945	-1.5677	-1.5677
0.50	1.6654	1.6421	3.1834	3.1534	-0.7839	-0.7812	-1.5208	-1.5208
0.75	2.4368	2.4022	2.9409	2.9113	-1.1563	-1.1523	-1.4427	-1.4427
1.00	3.1359	3.0903	2.6082	2.5792	-1.5052	-1.5000	-1.3333	-1.3333
1.25	3.7409	3.6848	2.1922	2.1639	-1.8229	-1.8164	-1.1927	-1.1927
1.50	4.2319	4.1660	1.7016	1.6742	-2.1016	-2.0938	-1.0208	-1.0208
1.75	4.5917	4.5166	1.1472	1.1209	-2.3333	-2.3242	-0.8177	-0.8177
2.00	4.8056	4.7222	0.5418	0.5167	-2.5104	-2.5000	-0.5833	-0.5833
2.25	4.8625	4.7719	-0.1002	-0.1239	-2.6250	-2.6133	-0.3177	-0.3177
2.50	4.7555	4.6586	-0.7619	-0.7841	-2.6693	-2.6562	-0.0208	-0.0208
2.75	4.4816	4.3798	-1.4250	-1.4455	-2.6354	-2.6211	0.3073	0.3073
3.00^-	4.0430	3.9375	-2.0689	-2.0875	-2.5156	-2.5000	0.6667	0.6667
3.00^+					-1.5156			
3.25	3.4784	3.3707	-2.4211	-2.4377	-1.3021	-1.2852	1.0573	1.0573
3.50	2.8324	2.7242	-2.7072	-2.7216	-0.9870	-0.9688	1.4792	1.4792
3.75	2.1248	2.0176	-2.9009	-2.9129	-0.5625	-0.5430	1.9323	1.9323
4.00	1.3819	1.2778	-2.9738	-2.9833	-0.0208	0.0000	2.4167	2.4167
4.25	0.6378	0.5386	-2.8957	-2.9025	0.6458	0.6680	2.9323	2.9323
4.50	-0.0659	-0.1582	-2.6343	-2.6383	1.4453	1.4688	3.4792	3.4792
4.75	-0.6793	-0.7624	-2.1555	-2.1564	2.3854	2.4102	4.0573	4.0573
5.00	-1.1437	-1.2153	-1.4231	-1.4208	3.4740	3.5000	4.6667	4.6667
5.25	-1.3909	-1.4485	-0.3990	-0.3934	4.7187	4.7461	5.3073	5.3073
5.50	-1.3432	-1.3843	0.9568	0.9659	6.1276	6.1562	5.9792	5.9792
5.75	-0.9125	-0.9345	2.6863	2.6990	7.7083	7.7383	6.6823	6.6823
6.00^-	0.0000	0.0000	4.8334	4.8500	9.4687	9.5000	7.4167	7.4167
6.00^+							-6.5000	-6.5000
6.25	1.5043	1.4929	7.0092	7.0295	7.9375	7.9661	-5.7812	-5.7812
6.50	3.5046	3.4846	8.8237	8.8474	6.5781	6.6042	-5.1250	-5.1250
6.75	5.9161	5.8899	10.3178	10.3446	5.3750	5.3984	-4.5313	-4.5312
7.00	8.6635	8.6333	11.5288	11.5583	4.3125	4.3333	-4.0000	-4.0000
7.25	11.6805	11.6482	12.4897	12.5217	3.3750	3.3932	-3.5312	-3.5312
7.50	14.9084	14.8758	13.2299	13.2641	2.5469	2.5625	-3.1250	-3.1250
7.75	18.2954	18.2640	13.7748	13.8108	1.8125	1.8255	-2.7812	-2.7812
8.00	21.7958	21.7667	14.1459	14.1833	1.1562	1.1667	-2.5000	-2.5000
8.25	25.3684	25.3426	14.3608	14.3993	0.5625	0.5703	-2.2812	-2.2812
8.50	28.9762	28.9544	14.4331	14.4724	0.0156	0.0208	-2.1250	-2.1250
8.75	32.5849	32.5677	14.3725	14.4123	-0.5000	-0.4974	-2.0312	-2.0312
9.00	36.1624	36.1500	14.1850	14.2250	-1.0000	-1.0000	-2.0000	-2.0000

Tabla 4.4

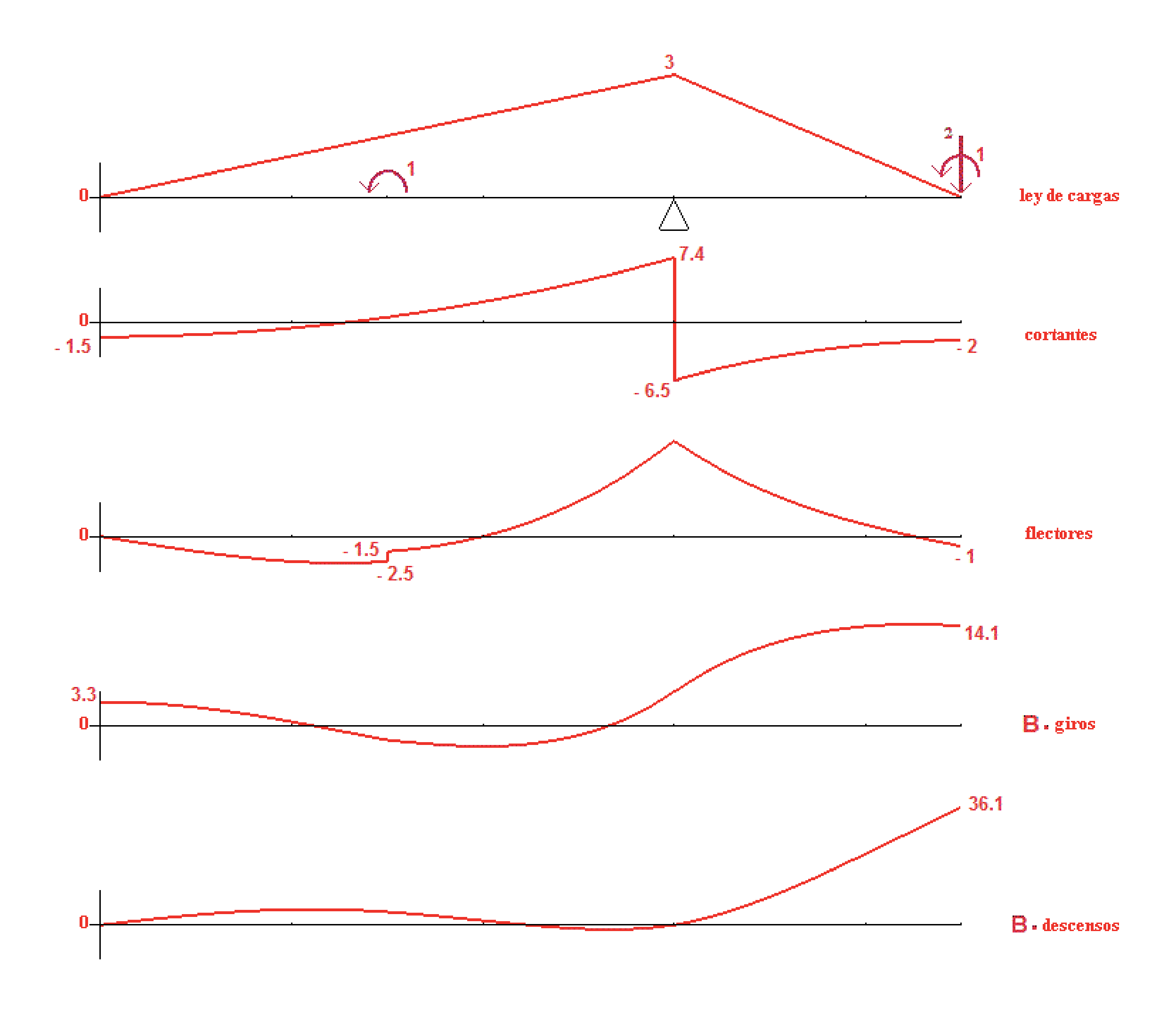

3
2
1
1
0
ley de cargas
7.4
0
- 1.5
- 6.5
- 2
cortantes
0
- 1.5
- 2.5
- 1
flectores
14.1
3.3
0
B - giros
36.1
0
B - descensos

Figura 4.14

4.2.2. Viga libre-apoyada

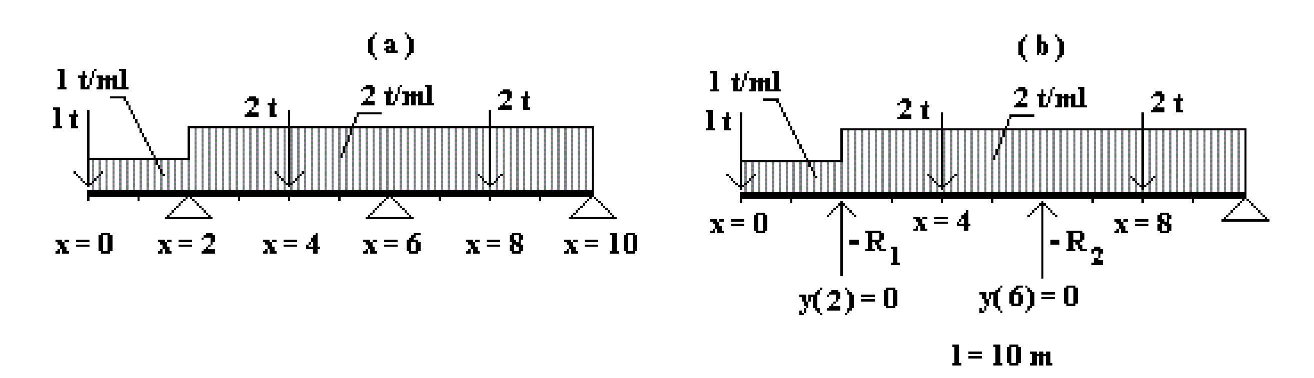


Figura 4.15

Una viga continua apoyada en su extremo derecho con dos tramos de 4 m y 8 m respectivamente tiene un voladizo en su extremo izquierdo de 2 m tal y como se muestra en la figura 4.13(a). En figura 4.13(b) se representa la “viga libre-apoyada” correspondiente en la que los apoyos interiores rígidos se substituyen por las reacciones desconocidas R_1 y R_2 con las correspondientes condiciones adicionales de descenso nulo en los puntos de apoyo.

La figura 4.16 nos permite escribir el sistema de ecuaciones correspondiente:

1ª etapa

$$
\begin{aligned}
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_2-2m_1+m_0\left(d\right)\right) &= 1,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_3-2m_2+m_1\right) &= 1,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_4-2m_3+m_2\right) &= 1,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_5-2m_4+m_3\right) &= 1,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_6-2m_5+m_4\right) &= 1,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_7-2m_6+m_5\right) &= 1,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_8\left(i\right)-2m_7+m_6\right) &= 1,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_9-2m_8\left(i\right)+m_7\right) &= 1.5+\tfrac{R_1}{0.25},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{10}-2m_9+m_8\left(d\right)\right) &= 2,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{11}-2m_{10}+m_9\right) &= 2,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{12}-2m_{11}+m_{10}\right) &= 2,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{13}-2m_{12}+m_{11}\right) &= 2,
\end{aligned}
$$

2ª etapa

$$
\begin{aligned}
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_2-2y_1+y_0\right) &= m_1,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_3-2y_2+y_1\right) &= m_2,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_4-2y_3+y_2\right) &= m_3,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_5-2y_4+y_3\right) &= m_4,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_6-2y_5+y_4\right) &= m_5,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_7-2y_6+y_5\right) &= m_6,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_8-2y_7+y_6\right) &= m_7,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_9-2y_8+y_7\right) &= m_8\left(i\right),\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{10}-2y_9+y_8\right) &= m_9,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{11}-2y_{10}+y_9\right) &= m_{10},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{12}-2y_{11}+y_{10}\right) &= m_{11},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{13}-2y_{12}+y_{11}\right) &= m_{12},
\end{aligned}
$$

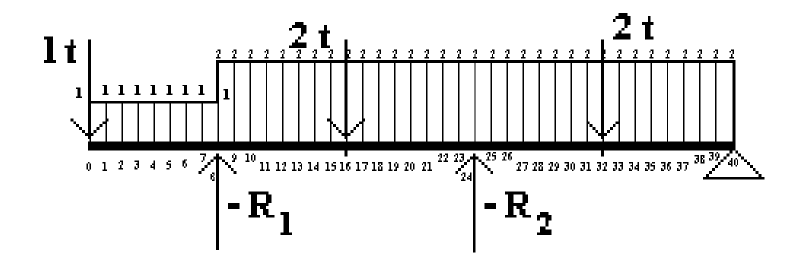


Figura 4.16

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{14}-2m_{13}+m_{12}\right) &= 2, & \tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{14}-2y_{13}+y_{12}\right) &= m_{13},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{15}-2m_{14}+m_{13}\right) &= 2, & \tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{15}-2y_{14}+y_{13}\right) &= m_{14},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{16}(i)-2m_{15}+m_{14}\right) &= 2, & \tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{16}-2y_{15}+y_{14}\right) &= m_{15},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{17}-2m_{16}(i)+m_{15}\right) &= 2+\tfrac{2}{0.25}, & \tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{17}-2y_{16}+y_{15}\right) &= m_{16}(i),\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{18}-2m_{17}+m_{16}(d)\right) &= 2, & \tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{18}-2y_{17}+y_{16}\right) &= m_{17},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{19}-2m_{18}+m_{17}\right) &= 2, & \tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{19}-2y_{18}+y_{17}\right) &= m_{18},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{20}-2m_{19}+m_{18}\right) &= 2, & \tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{20}-2y_{19}+y_{18}\right) &= m_{19},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{21}-2m_{20}+m_{19}\right) &= 2, & \tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{21}-2y_{20}+y_{19}\right) &= m_{20},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{22}-2m_{21}+m_{20}\right) &= 2, & \tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{22}-2y_{21}+y_{20}\right) &= m_{21},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{23}-2m_{22}+m_{21}\right) &= 2, & \tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{23}-2y_{22}+y_{21}\right) &= m_{22},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{24}(i)-2m_{23}+m_{22}\right) &= 2, & \tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{24}-2y_{23}+y_{22}\right) &= m_{23},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{25}-2m_{24}(i)+m_{23}\right) &= 2+\tfrac{R_2}{0.25}, & \tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{25}-2y_{24}+y_{23}\right) &= m_{24}(i),\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{26}-2m_{25}+m_{24}(d)\right) &= 2, & \tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{26}-2y_{25}+y_{24}\right) &= m_{25},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{27}-2m_{26}+m_{25}\right) &= 2, & \tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{27}-2y_{26}+y_{25}\right) &= m_{26},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{28}-2m_{27}+m_{26}\right) &= 2, & \tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{28}-2y_{27}+y_{26}\right) &= m_{27},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{29}-2m_{28}+m_{27}\right) &= 2, & \tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{29}-2y_{28}+y_{27}\right) &= m_{28},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{30}-2m_{29}+m_{28}\right) &= 2, & \tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{30}-2y_{29}+y_{28}\right) &= m_{29},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{31}-2m_{30}+m_{29}\right) &= 2, & \tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{31}-2y_{30}+y_{29}\right) &= m_{30},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{32}(i)-2m_{31}+m_{30}\right) &= 2, & \tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{32}-2y_{31}+y_{30}\right) &= m_{31},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{33}-2m_{32}(i)+m_{31}\right) &= 2+\tfrac{2}{0.25}, & \tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{33}-2y_{32}+y_{31}\right) &= m_{32}(i),\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{34}-2m_{33}+m_{32}(d)\right) &= 2, & \tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{34}-2y_{33}+y_{32}\right) &= m_{33},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{35}-2m_{34}+m_{33}\right) &= 2, & \tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{35}-2y_{34}+y_{33}\right) &= m_{34},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{36}-2m_{35}+m_{34}\right) &= 2, & \tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{36}-2y_{35}+y_{34}\right) &= m_{35},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{37}-2m_{36}+m_{35}\right) &= 2, & \tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{37}-2y_{36}+y_{35}\right) &= m_{36},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{38}-2m_{37}+m_{36}\right) &= 2, & \tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{38}-2y_{37}+y_{36}\right) &= m_{37},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{39}-2m_{38}+m_{37}\right) &= 2, & \tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{39}-2y_{38}+y_{37}\right) &= m_{38},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{40}(i)-2m_{39}+m_{38}\right) &= 2, & \tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{40}-2y_{39}+y_{38}\right) &= m_{39},
\end{aligned}$$

con las condiciones:
$m_0(d) = 0,$
$m_1 = \frac{1}{2}\cdot 0.25^2\cdot 1 + 0.25\cdot 1,$
$m_8(d) = m_8(i) + R_1,$
$m_{16}(d) = m_{16}(i) + 2,$
$m_{24}(d) = m_{24}(i) + R_2,$
$m_{32}(d) = m_{32}(i) + 2,$
$m_{40}(i) = -0,$

con las condiciones:
$y_8 = 0,$
$y_{24} = 0,$
$y_{40} = 0.$

La solución de este sistema junto con los valores de los cortantes y giros de las secciones transversales se muestran en la tabla 4.5 y en la figura 4.17. En este caso las reacciones obtenidas son: $R_1 = -7.8801$ y $R_2 = -11.2398$.

x	descensos By		giros $B\theta = By'$		momentos $m = By''$		cortantes $t = By'''$	
	discretos	exactos	discretos	exactos	discretos	exactos	discretos	exactos
0.00	6.7306	6.6667	-4.3497	-4.3333	0.0000	0.0000	1.0000	1.0000
0.25	5.6432	5.5861	-4.3145	-4.2995	0.2813	0.2812	1.2500	1.2500
0.50	4.5734	4.5234	-4.2013	-4.1875	0.6250	0.6250	1.5000	1.5000
0.75	3.5426	3.5002	-3.9942	-3.9818	1.0313	1.0312	1.7500	1.7500
1.00	2.5763	2.5417	-3.6778	-3.6667	1.5000	1.5000	2.0000	2.0000
1.25	1.7037	1.6772	-3.2364	-3.2266	2.0313	2.0312	2.2500	2.2500
1.50	0.9580	0.9401	-2.6544	-2.6458	2.6250	2.6250	2.5000	2.5000
1.75	0.3765	0.3674	-1.9161	-1.9089	3.2813	3.2812	2.7500	2.7500
2.00^-	0.0000	0.0000	-1.0059	-1.0000	4.0000	4.0000	3.0000	3.0000
2.00^+							-4.8801	-4.8750
2.25	-0.1265	-0.1374	-0.1506	-0.1471	2.8425	2.8438	-4.3801	-4.3750
2.50	-0.0753	-0.0964	0.4309	0.4323	1.8099	1.8125	-3.8801	-3.8750
2.75	0.0890	0.0586	0.7700	0.7695	0.9024	0.9062	-3.3801	-3.3750
3.00	0.3097	0.2708	0.8978	0.8958	0.1199	0.1250	-2.8801	-2.8750
3.25	0.5379	0.4915	0.8455	0.8424	-0.5376	-0.5312	-2.3801	-2.3750
3.50	0.7324	0.6797	0.6446	0.6406	-1.0702	-1.0625	-1.8801	-1.8750
3.75	0.8601	0.8021	0.3261	0.3216	-1.4777	-1.4688	-1.3801	-1.3750
4.00^-	0.8955	0.8333	-0.0787	-0.0833	-1.7602	-1.7500	-0.8801	-0.8750
4.00^+							1.1199	1.1250
4.25	0.8208	0.7611	-0.4759	-0.4805	-1.4178	-1.4062	1.6199	1.6250
4.50	0.6575	0.6016	-0.7719	-0.7760	-0.9503	-0.9375	2.1199	2.1250
4.75	0.4348	0.3841	-0.9354	-0.9388	-0.3578	-0.3438	2.6199	2.6250
5.00	0.1898	0.1458	-0.9352	-0.9375	0.3596	0.3750	3.1199	3.1250
5.25	-0.0328	-0.0684	-0.7400	-0.7409	1.2021	1.2188	3.6199	3.6250
5.50	-0.1802	-0.2057	-0.3185	-0.3177	2.1696	2.1875	4.1199	4.1250
5.75	-0.1920	-0.2057	0.3604	0.3633	3.2621	3.2812	4.6199	4.6250
6.00^-	0.0000	0.0000	1.3281	1.3333	4.4795	4.5000	5.1199	5.125
6.00^+							-6.1199	-6.1250
6.25	0.4720	0.4583	2.2646	2.2721	3.0121	3.0312	-5.6199	-5.6250
6.50	1.1323	1.1068	2.8498	2.8594	1.6696	1.6875	-5.1199	-5.1250
6.75	1.8969	1.8613	3.1150	3.1263	0.4521	0.4688	-4.6199	-4.6250
7.00	2.6898	2.6458	3.0915	3.1042	-0.6404	-0.6250	-4.1199	-4.1250
7.25	3.4426	3.3919	2.8104	2.8242	-1.6078	-1.5938	-3.6199	-3.6250
7.50	4.0950	4.0391	2.3032	2.3177	-2.4503	-2.4375	-3.1199	-3.1250
7.75	4.5942	4.5345	1.6009	1.6159	-3.1678	-3.1562	-2.6199	-2.6250
8.00^-	4.8955		0.7349	0.7500	-3.7602	-3.7500	-2.1199	-2.125
8.00^+							-0.1199	-.12500
8.25	4.9617	4.9036	-0.2011	-0.1862	-3.7277	-3.7188	0.3801	0.3750
8.50	4.7949	4.7422	-1.1133	-1.0990	-3.5702	-3.5625	0.8801	0.8750
8.75	4.4050	4.3587	-1.9705	-1.9570	-3.2876	-3.2812	1.3801	1.3750
9.00	3.8097	3.7708	-2.7415	-2.7292	-2.8801	-2.8750	1.8801	1.8750
9.25	3.0343	3.0039	-3.3950	-3.3841	-2.3476	-2.3438	2.3801	2.3750
9.50	2.1122	2.0911	-3.8997	-3.8906	-1.6901	-1.6875	2.8801	2.8750
9.75	1.0845	1.0736	-4.2244	-4.2174	-0.9075	-0.9062	3.3801	3.3750
10.00	0.0000	0.0000	-4.3378	-4.3333	0.0000	0.0000	3.8801	3.8750

Tabla 4.5

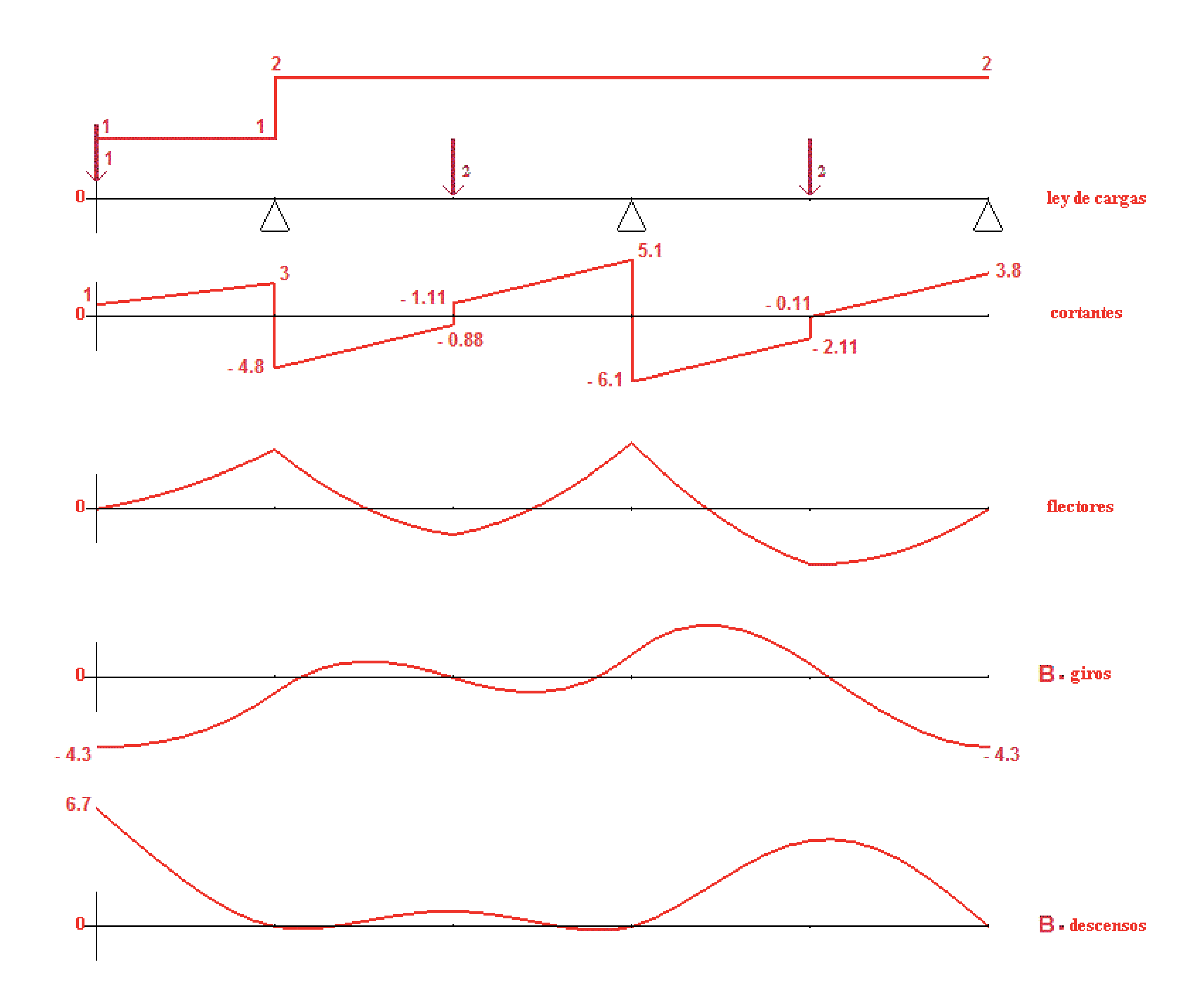

2
2
1
1
1
2
2
0
ley de cargas
5.1
3
3.8
1
- 1.11
- 0.11
0
cortantes
- 0.88
- 2.11
- 4.8
- 6.1
0
flectores
0
B - giros
- 4.3
- 4.3
6.7
0
B - descensos

Figura 4.17

4.2.3. Viga libre-libre

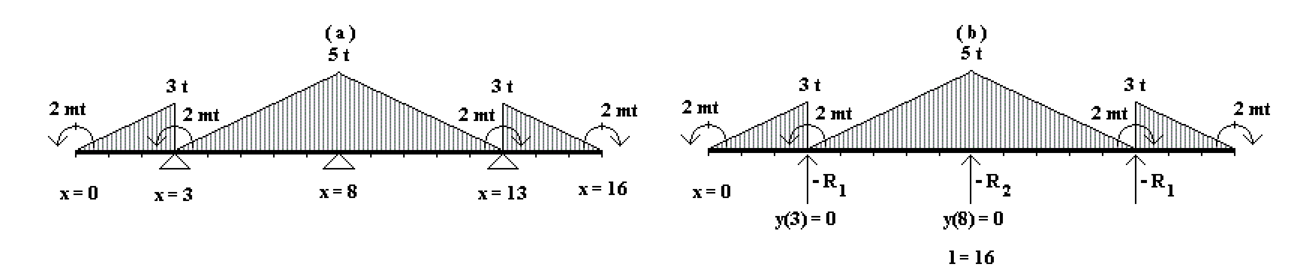


Figura 4.18

Se considera ahora una viga con voladizos en ambos extremos de 3 m y con dos tramos de 5 m cada uno tal y como se muestra en la figura 4.18(a). La figura 4.18(b) muestra su equivalente con tres apoyos interiores descritas por las reacciones R_1, R_2 y R_3.

La figura 4.19 nos permite escribir el sistema de ecuaciones correspondiente, donde se imponen en este caso las condiciones de simetría:

$$
\begin{array}{llllll}
1^{\underline{a}} \text{ etapa} & & & 2^{\underline{a}} \text{ etapa} & & \\
\frac{1}{0.25^2}\left(m_2 - 2m_1 + m_0\left(d\right)\right) & = & 0.25, & \frac{1}{0.25^2}\left(y_2 - 2y_1 + y_0\right) & = & m_1, \\
\frac{1}{0.25^2}\left(m_3 - 2m_2 + m_1\right) & = & 0.5, & \frac{1}{0.25^2}\left(y_3 - 2y_2 + y_1\right) & = & m_2, \\
\frac{1}{0.25^2}\left(m_4 - 2m_3 + m_2\right) & = & 0.75, & \frac{1}{0.25^2}\left(y_4 - 2y_3 + y_2\right) & = & m_3, \\
\frac{1}{0.25^2}\left(m_5 - 2m_4 + m_3\right) & = & 1, & \frac{1}{0.25^2}\left(y_5 - 2y_4 + y_3\right) & = & m_4, \\
\frac{1}{0.25^2}\left(m_6 - 2m_5 + m_4\right) & = & 1.25, & \frac{1}{0.25^2}\left(y_6 - 2y_5 + y_4\right) & = & m_5, \\
\frac{1}{0.25^2}\left(m_7 - 2m_6 + m_5\right) & = & 1.5, & \frac{1}{0.25^2}\left(y_7 - 2y_6 + y_5\right) & = & m_6, \\
\frac{1}{0.25^2}\left(m_8 - 2m_7 + m_6\right) & = & 1.75, & \frac{1}{0.25^2}\left(y_8 - 2y_7 + y_6\right) & = & m_7, \\
\frac{1}{0.25^2}\left(m_9 - 2m_8 + m_7\right) & = & 2, & \frac{1}{0.25^2}\left(y_9 - 2y_8 + y_7\right) & = & m_8, \\
\frac{1}{0.25^2}\left(m_{10} - 2m_9 + m_8\right) & = & 2.25, & \frac{1}{0.25^2}\left(y_{10} - 2y_9 + y_8\right) & = & m_9, \\
\frac{1}{0.25^2}\left(m_{11} - 2m_{10} + m_9\right) & = & 2.5, & \frac{1}{0.25^2}\left(y_{11} - 2y_{10} + y_9\right) & = & m_{10},
\end{array}
$$

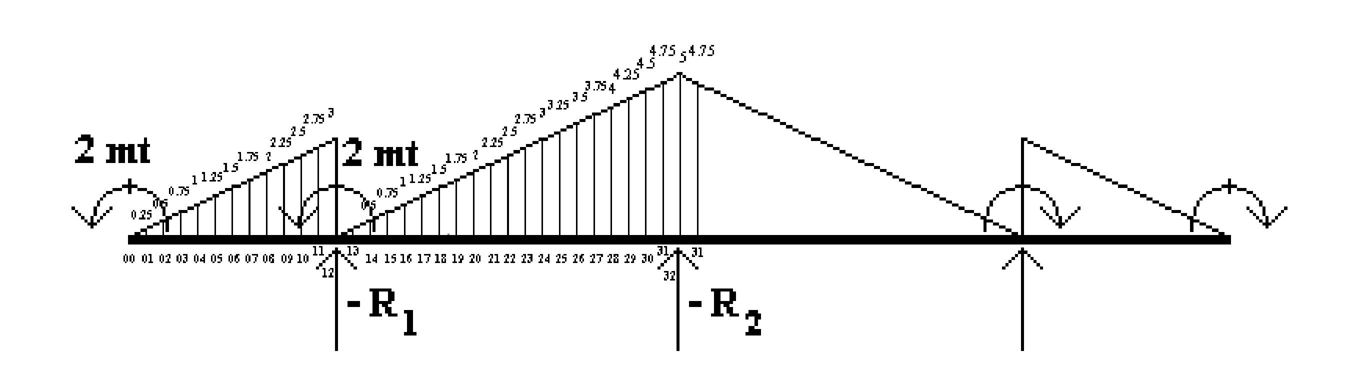


Figura 4.19

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{12}\left(i\right)-2m_{11}+m_{10}\right) &= 2.75, \\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{13}-2m_{12}\left(i\right)+m_{11}\right) &= 1.5+\tfrac{R_1}{0.25}+\tfrac{2}{0.25^2}, \\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{14}-2m_{13}+m_{12}\left(d\right)\right) &= 0.25, \\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{15}-2m_{14}+m_{13}\right) &= 0.5, \\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{16}-2m_{15}+m_{14}\right) &= 0.75, \\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{17}-2m_{16}+m_{15}\right) &= 1, \\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{18}-2m_{17}+m_{16}\right) &= 1.25, \\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{19}-2m_{18}+m_{17}\right) &= 1.5, \\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{20}-2m_{19}+m_{18}\right) &= 1.75, \\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{21}-2m_{20}+m_{19}\right) &= 2, \\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{22}-2m_{21}+m_{20}\right) &= 2.25, \\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{23}-2m_{22}+m_{21}\right) &= 2.5, \\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{24}-2m_{23}+m_{22}\right) &= 2.75, \\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{25}-2m_{24}+m_{23}\right) &= 3, \\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{26}-2m_{25}+m_{24}\right) &= 3.25, \\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{27}-2m_{26}+m_{25}\right) &= 3.5, \\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{28}-2m_{27}+m_{26}\right) &= 3.75, \\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{29}-2m_{28}+m_{27}\right) &= 4, \\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{30}-2m_{29}+m_{28}\right) &= 4.25, \\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{31}-2m_{30}+m_{29}\right) &= 4.5, \\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{32}-2m_{31}+m_{30}\right) &= 4.75, \\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{31}-2m_{32}+m_{31}\right) &= 5+\tfrac{R_2}{0.25},
\end{aligned}$$

con las condiciones:
$m_0\left(d\right)=2,$
$m_1=2,$
$m_{12}\left(d\right)=m_{12}\left(i\right)+R_1,$
$m_{32}\left(d\right)=m_{32}\left(i\right)+R_2,$

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{12}-2y_{11}+y_{10}\right) &= m_{11}, \\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{13}-2y_{12}+y_{11}\right) &= m_{12}\left(i\right)+\tfrac{1}{2}\cdot 2, \\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{14}-2y_{13}+y_{12}\right) &= m_{13}, \\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{15}-2y_{14}+y_{13}\right) &= m_{14}, \\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{16}-2y_{15}+y_{14}\right) &= m_{15}, \\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{17}-2y_{16}+y_{15}\right) &= m_{16}, \\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{18}-2y_{17}+y_{16}\right) &= m_{17}, \\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{19}-2y_{18}+y_{17}\right) &= m_{18}, \\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{20}-2y_{19}+y_{18}\right) &= m_{19}, \\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{21}-2y_{20}+y_{19}\right) &= m_{20}, \\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{22}-2y_{21}+y_{20}\right) &= m_{21}, \\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{23}-2y_{22}+y_{21}\right) &= m_{22}, \\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{24}-2y_{23}+y_{22}\right) &= m_{23}, \\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{25}-2y_{24}+y_{23}\right) &= m_{24}, \\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{26}-2y_{25}+y_{24}\right) &= m_{25}, \\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{27}-2y_{26}+y_{25}\right) &= m_{26}, \\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{28}-2y_{27}+y_{26}\right) &= m_{27}, \\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{29}-2y_{28}+y_{27}\right) &= m_{28}, \\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{30}-2y_{29}+y_{28}\right) &= m_{29}, \\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{31}-2y_{30}+y_{29}\right) &= m_{30}, \\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{32}-2y_{31}+y_{30}\right) &= m_{31}, \\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{31}-2y_{32}+y_{31}\right) &= m_{32},
\end{aligned}$$

con las condiciones:
$y_{12}=0,$
$y_{32}=0.$

La solución del sistema se muestra en la tabla 4.6 y en la figura 4.20 junto con los esfuerzos de corte y los giros de las secciones transversales. En este caso, las reacciones obtenidas son $R_1=-9.5343$ y $R_2=-14.9314$.

x	descensos By		giros $B\theta = By'$		momentos $m = By''$		cortantes $t = By'''$	
	discretos	exactos	discretos	exactos	discretos	exactos	discretos	exactos
0.00	33.2737	33.3500	-14.7429	-14.7917	2.0000	2.0000	0.0000	0.0000
0.25	29.6504	29.7146	-14.2429	-14.2915	2.0000	2.0026	0.0313	0.0312
0.50	26.1522	26.2044	-13.7410	-13.7891	2.0156	2.0208	0.1250	0.1250
0.75	22.7800	22.8207	-13.2312	-13.2785	2.0625	2.0703	0.2813	0.2812
1.00	19.5366	19.5667	-12.7039	-12.7500	2.1563	2.1667	0.5000	0.5000
1.25	16.4280	16.4483	-12.1453	-12.1899	2.3125	2.3255	0.7813	0.7812
1.50	13.4640	13.4758	-11.5378	-11.5807	2.5469	2.5625	1.1250	1.1250
1.75	10.6591	10.6639	-10.8601	-10.9009	2.8750	2.8932	1.5313	1.5312
2.00	8.0339	8.0333	-10.0867	-10.1250	3.3125	3.3333	2.0000	2.0000
2.25	5.6158	5.6118	-9.1882	-9.2238	3.8750	3.8984	2.5313	2.5312
2.50	3.4398	3.4346	-8.1316	-8.1641	4.5781	4.6042	3.1250	3.1250
2.75	1.5500	1.5461	-6.8796	-6.9087	5.4375	5.4661	3.7813	3.7812
3.00^-	0.0000	0.0000	-5.3914	-5.4167	6.4688	6.5000	4.5000	4.5000
3.00^+					8.4688	8.5000	-5.0343	-5.0500
3.25	-1.0832	-1.1017	-3.4315	-3.4493	7.2102	7.2401	-5.0031	-5.0187
3.50	-1.7157	-1.7508	-1.7843	-1.7953	5.9672	5.9958	-4.9093	-4.9250
3.75	-1.9753	-2.0250	-0.4440	-0.4488	4.7555	4.7828	-4.7531	-4.7687
4.00	-1.9377	-2.0000	0.5993	0.6000	3.5907	3.6167	-4.5343	-4.5500
4.25	-1.6757	-1.7487	1.3592	1.3647	2.4884	2.5130	-4.2531	-4.2687
4.50	-1.2581	-1.3398	1.8532	1.8630	1.4642	1.4875	-3.9093	-3.9250
4.75	-0.7491	-0.8376	2.1030	2.1163	0.5337	0.5557	-3.5031	-3.5187
5.00	-0.2067	-0.3000	2.1338	2.1500	-0.2874	-0.2667	-3.0343	-3.0500
5.25	0.3178	0.2216	1.9749	1.9934	-0.9835	-0.9641	-2.5031	-2.5187
5.50	0.7808	0.6836	1.6596	1.6797	-1.5389	-1.5208	-1.9093	-1.9250
5.75	1.1476	1.0514	1.2250	1.2460	-1.9381	-1.9214	-1.2531	-1.2688
6.00	1.3933	1.3000	0.7120	0.7333	-2.1654	-2.1500	-0.5343	-0.5500
6.25	1.5036	1.4152	0.1657	0.1866	-2.2053	-2.1911	0.2469	0.2313
6.50	1.4761	1.3945	-0.3652	-0.3453	-2.0420	-2.0292	1.0907	1.0750
6.75	1.3210	1.2482	-0.8280	-0.8097	-1.6599	-1.6484	1.9969	1.9812
7.00	1.0621	1.0000	-1.1659	-1.1500	-1.0435	-1.0333	2.9657	2.9500
7.25	0.7381	0.6885	-1.3185	-1.3056	-0.1771	-0.1682	3.9969	3.9813
7.50	0.4029	0.3680	-1.2212	-1.2120	0.9550	0.9625	5.0907	5.0750
7.75	0.1275	0.1090	-0.8058	-0.8009	2.3682	2.3745	6.2469	6.2313
8.00^-	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	4.0784	4.0833	7.4657	7.4500
8.00^+							-7.4657	-7.4500

Tabla 4.6

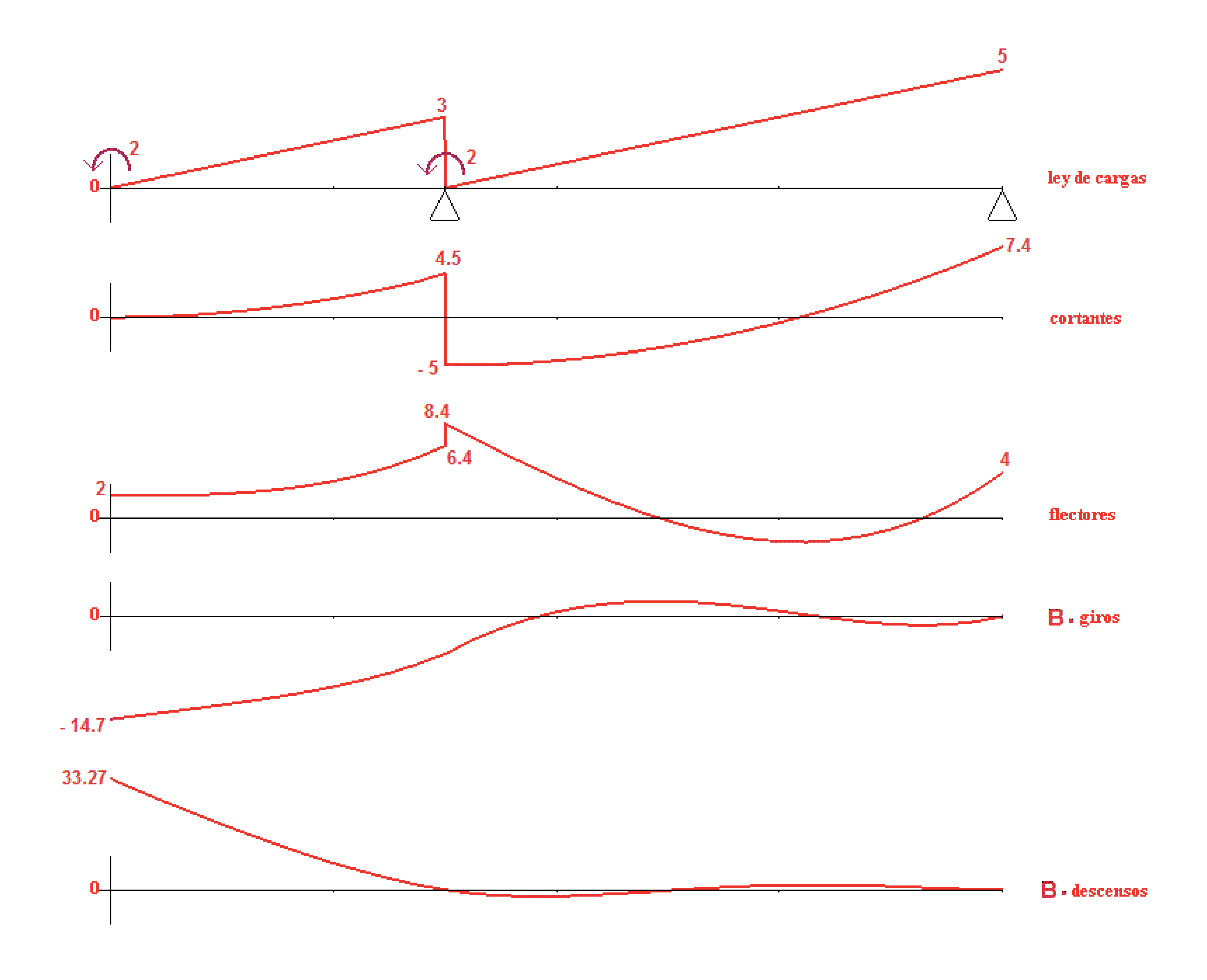

5
3
2
2
0
ley de cargas
4.5
7.4
0
cortantes
- 5
8.4
6.4
4
2
0
flectores
0
B. giros
- 14.7
33.27
0
B. descensos

Figura 4.20

5 Extensión a las vigas compuestas

Sin entrar en el análisis de los modelos físicos y de los condicionantes elásticos o constructivos que permitan hablar de una “rótula” en cualquier punto de una viga de rigidez constante, se consideran aquí las vigas que las incluyen y que venimos denominando vigas “compuestas”. Como se sabe el número máximo de “rótulas” incluidas en las vigas está limitado por el grado de hiperestatismo de la estructura. Una rótula más en una pieza convertida ya en isostática la convierte en un mecanismo en el que toda la estructura o sectores determinados de la misma no son capaces de respuesta a flexión y por lo tanto dejan de ser “vigas”. Una simple fisura en una pieza de hormigón armado puede ser considerada, en su caso, una rótula pero, como se ha dicho, estas cuestiones quedan fuera del alcance de este texto. Aquí queremos simplemente introducir, con la misma metodología de diferencias finitas, el acoplamiento entre dos sectores de viga de igual rigidez que dejen libre el giro de ambas secciones. A efectos del cálculo el punto que determina la articulación deberá estar definido en un nodo de la discretización para poder imponerle directamente las condiciones que definen el acoplamiento. Este acoplamiento es simplemente una articulación interior “perfecta” en el cual ambos sectores comparten la misma flecha pero que consecuentemente el giro de cada sección a ambos lados de la articulación es diferente. Esto implica que la curva elástica no es una función de clase uno y por lo tanto no es válida la aplicación del esquema en diferencias (3.4) para el que se utilizó la igualdad a derecha e izquierda de la primera derivada y'. Sin embargo, teniendo en cuenta que la ley de cortantes no queda afectada por la rótula podemos dar por válida la fórmula que define el algoritmo de la primera etapa del cálculo. El resultado final es que por una parte nos falta una ecuación de vínculo entre ambos tramos en la segunda etapa pero por el contrario disponemos de una ecuación adicional en la primera ya que el momento flector debe de ser nulo en el punto de acoplamiento. Todas estas consideraciones están implícitas en las condiciones de conjugación de la articulación interna que substituyen a las ecuaciones (3.1) y (3.2) correspondientes a la unión rígida. Las condiciones relativas a las rótulas serán:

$$\begin{array}{lll} y_j\,(d) - y_j\,(i) = 0, & & \\ By_j''\,(d) = By_j''\,(i) = 0 & \Longrightarrow & m_j\,(d) = m_j\,(i) = 0, \\ By_j'''\,(d) - By_j'''\,(i) = Q & \Longrightarrow & t_j\,(d) - t_j\,(i) = Q, \end{array} \tag{5.1}$$

donde (d) e (i) representan, como viene siendo habitual en el texto, el valor que toman las correspondientes funciones a la derecha y la izquierda respectivamente del punto x_j en cuestión. Adoptando la notación general $f_j\,(d) - f_j\,(i) = [f_j]$ que hemos venido utilizando, estas tres condiciones se pueden representar simplemente por

$$\begin{array}{l} [y_j] = 0, \\ By_j'' = m_j = 0, \\ \left[By_j'''\right] = [t_j] = Q. \end{array} \tag{5.2}$$

cálculo de cortantes en vigas compuestas	
extremo izquierdo	$t_0\left(d\right)=\dfrac{m_1\left(i\right)-m_0\left(d\right)}{h}-\dfrac{1}{2}hw_0\left(d\right)$
nodos interiores incluida la rótula	$t_j\left(i\right)=\dfrac{m_{j+1}\left(i\right)-m_{j-1}\left(d\right)}{2h}-\dfrac{Q}{2}-\dfrac{M}{2h}+\dfrac{1}{4}h\left[w_j\right]$
extremo derecho	$t_N\left(i\right)=\dfrac{m_N\left(i\right)-m_{N-1}\left(d\right)}{h}+\dfrac{1}{2}hw_N\left(i\right)$

Tabla 5.1

Para abordar el análisis de la flexión en estas vigas compuestas bastará utilizar sin restricciones el esquema de aplicación correspondiente a la primara etapa (3.3) tal y como hemos venido haciendo a lo largo del § 3 y § 4, es decir la aplicación del esquema:

$$\frac{m_{j+1}\left(i\right)-2m_j\left(i\right)+m_{j-1}\left(d\right)}{h^2}=\bar{w}_j+\frac{1}{h}Q+\frac{1}{h^2}M$$

incluyendo la condición $m_j=0$ en cada punto x_j donde exista una articulación interna, tanto en la propia ecuación de vínculo como en los valores del momento flector alcanzados por el esquema en ambos sectores a derecha e izquierda de la articulación. En la segunda etapa bastará no imponer la ecuación en el propio punto que define la articulación y aplicarla al resto de los nodos incluso los próximos que puedan alcanzar la rótula sin ninguna otra limitación. Es decir el esquema:

$$B\frac{y_{j+1}-2y_j+y_{j-1}}{h^2}=m_j\left(i\right)+\frac{1}{2}M$$

podrá y deberá ser aplicado en todos los nodos excepto en el punto del vínculo entre ambos tramos que determina la rótula. En cuanto a la ecuación de vínculo en el propio punto de la articulación, esta puede ser reconstruida por otros medios para que satisfagan el sistema pero para nuestra finalidad resulta innecesario toda vez que el resultado es que dispondremos de un sistema de Cramer –compatible determinado de igual número de ecuaciones que de incógnitas–.

Las fórmulas para la obtención de los esfuerzos de corte no sufren modificación y pueden ser aplicadas tanto en los puntos interiores (incluida la rótula) como en los extremos. Podemos, por lo tanto, extraer de la tabla 3.3 los algoritmos de la tabla 5.1 para el cálculo de los cortantes.

Sin embargo no es de aplicación la fórmula utilizada para la obtención de los giros en el nodo correspondiente a la articulación interna por las razones ya expresadas. Puede observarse que para su obtención se han utilizando las condiciones de la unión rígida lo que no es admisible en la rótula. En realidad a efectos de los giros de las secciones transversales, la articulación interna divide en dos piezas la viga compuesta. Esta es justamente la característica esencial que define matemáticamente este acoplamiento sostenido básicamente por el descenso común y donde la continuidad del cortante es solamente una consecuencia. Congruente con esto último, el procedimiento más simple a emplear para la obtención de los giros puede ser el de considerar la articulación un extremo para los sectores de viga a la derecha y a la izquierda del acoplamiento. Los esquemas de aproximación se extraen de la tabla 3.3 y se presentan en la tabla 5.2.

cálculo de giros en vigas compuestas	
extremo izquierdo de la viga giro del extremo del sector a la derecha de la rótula	$\theta_0\,(d) = \dfrac{y_1 - y_0}{h} - \dfrac{1}{2}hm_0\,(d)$
nodos interiores (excepto la articulación interna)	$\theta_j = \dfrac{y_{j+1}\,(i) - y_{j-1}\,(d)}{2h} - \dfrac{1}{4}hM$
extremo derecho de la viga giro del extremo del sector a la izquierda de la rótula	$\theta_N\,(i) = \dfrac{y_N - y_{N-1}}{h} + \dfrac{1}{2}hm_N\,(i)$

Tabla 5.2

Los siguientes ejemplos permiten comprender la aplicación de todo lo dicho.

5.1. Viga apoyada-empotrada con una rótula interior

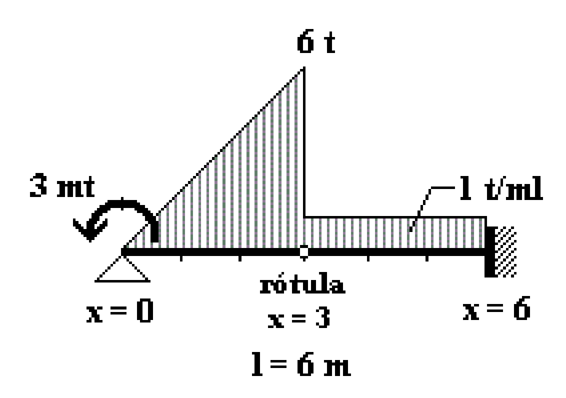


Figura 5.1

Se considera una viga apoyada-empotrada de 6 m de longitud con una rótula en su punto medio con sobrecargas y solicitación puntual como se representa en la figura 5.1.

Sobre el esquema de la figura 5.2 podemos establecer el siguiente sistema de ecuaciones en sus dos etapas:

1ª etapa

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_2-2m_1+m_0\,(d)\right) &= 0.5,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_3-2m_2+m_1\right) &= 1,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_4-2m_3+m_2\right) &= 1.5,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_5-2m_4+m_3\right) &= 2,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_6-2m_5+m_4\right) &= 2.5,
\end{aligned}$$

2ª etapa

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_2-2y_1+y_0\right) &= m_1,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_3-2y_2+y_1\right) &= m_2,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_4-2y_3+y_2\right) &= m_3,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_5-2y_4+y_3\right) &= m_4,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_6-2y_5+y_4\right) &= m_5,
\end{aligned}$$

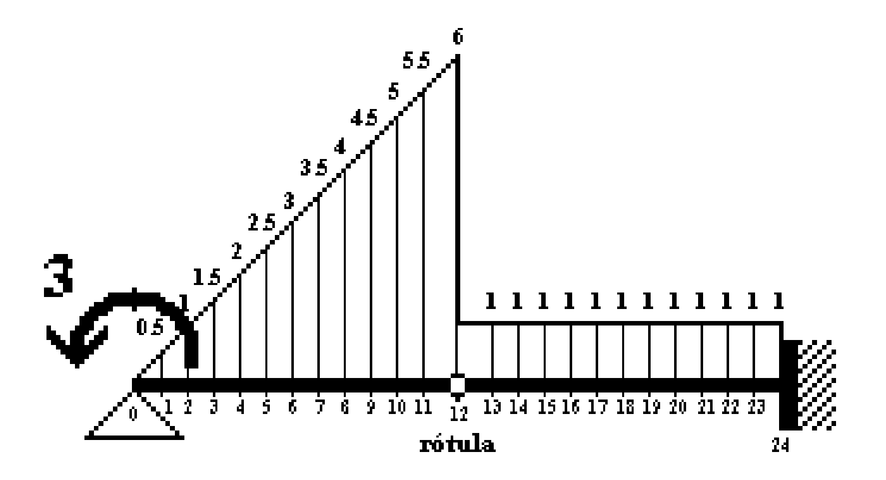


Figura 5.2

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_7-2m_6+m_5\right) &= 3,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_8-2m_7+m_6\right) &= 3.5,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_9-2m_8+m_7\right) &= 4,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{10}-2m_9+m_8\right) &= 4.5,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{11}-2m_{10}+m_9\right) &= 5,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{12}-2m_{11}+m_{10}\right) &= 5.5,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{13}-2m_{12}+m_{11}\right) &= 3.5,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{14}-2m_{13}+m_{12}\right) &= 1,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{15}-2m_{14}+m_{13}\right) &= 1,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{16}-2m_{15}+m_{14}\right) &= 1,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{17}-2m_{16}+m_{15}\right) &= 1,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{18}-2m_{17}+m_{16}\right) &= 1,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{19}-2m_{18}+m_{17}\right) &= 1,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{20}-2m_{19}+m_{18}\right) &= 1,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{21}-2m_{20}+m_{19}\right) &= 1,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{22}-2m_{21}+m_{20}\right) &= 1,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{23}-2m_{22}+m_{21}\right) &= 1,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{24}(i)-2m_{23}+m_{22}\right) &= 1,
\end{aligned}$$

con las condiciones:
$m_0(d)=3,$
$m_{12}=0,$

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_7-2y_6+y_5\right) &= m_6,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_8-2y_7+y_6\right) &= m_7,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_9-2y_8+y_7\right) &= m_8,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{10}-2y_9+y_8\right) &= m_9,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{11}-2y_{10}+y_9\right) &= m_{10},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{12}-2y_{11}+y_{10}\right) &= m_{11},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{14}-2y_{13}+y_{12}\right) &= m_{13},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{15}-2y_{14}+y_{13}\right) &= m_{14},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{16}-2y_{15}+y_{14}\right) &= m_{15},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{17}-2y_{16}+y_{15}\right) &= m_{16},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{18}-2y_{17}+y_{16}\right) &= m_{17},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{19}-2y_{18}+y_{17}\right) &= m_{18},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{20}-2y_{19}+y_{18}\right) &= m_{19},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{21}-2y_{20}+y_{19}\right) &= m_{20},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{22}-2y_{21}+y_{20}\right) &= m_{21},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{23}-2y_{22}+y_{21}\right) &= m_{22},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{24}-2y_{23}+y_{22}\right) &= m_{23},
\end{aligned}$$

con las condiciones:
$y_0=0,$
$y_{22}=\frac{1}{2}\cdot 0.25^2\cdot m_{24}(i),$
$y_{23}=0.$

El sistema puede calcularse en dos etapas sucesivas –no necesariamente simultáneas– en la primera de las cuales obtenemos los momentos flectores y en la segunda los descensos en su correspondiente escala –dividiéndolos por el coeficiente de rigidez B–. En cualquier caso el resultado de las dos etapas conjuntamente podemos verlo en la tabla 5.3.

Con estos conjuntos de datos numéricos podemos reconstruir las gráficas aproximadas de las funciones de esfuerzo y de deformación. Las cuatro funciones se representan gráficamente junto a la ley de cargas en la figura 5.3.

En la tabla 5.3 se muestran, para su comparación directa, estos valores aproximados calculados sobre la red $h=0.25$ y los valores exactos obtenidos por métodos continuos.

x	descensos By		giros $B\theta = By'$		momentos $m = By''$		cortantes $t = By'''$	
	discretos	exactos	discretos	exactos	discretos	exactos	discretos	exactos
0.00	0.0000	0.0000	18.6372	18.5250	3.0000	3.0000	-3.9792	-4.0000
0.25	4.7530	4.7146	19.2628	19.1503	2.0052	2.0052	-3.9167	-3.9375
0.50	9.6314	9.5547	19.6437	19.5302	1.0417	1.0417	-3.7292	-3.7500
0.75	14.5749	14.4602	19.7914	19.6764	0.1406	0.1406	-3.4167	-3.4375
1.00	19.5271	19.3750	19.7257	19.6083	-0.6667	-0.6667	-2.9792	-3.0000
1.25	24.4377	24.2488	19.4737	19.3534	-1.3490	-1.3490	-2.4167	-2.4375
1.50	29.2640	29.0391	19.0707	18.9469	-1.8750	-1.8750	-1.7292	-1.7500
1.75	33.9731	33.7131	18.5597	18.4316	-2.2135	-2.2135	-0.9167	-0.9375
2.00	38.5438	38.2500	17.9913	17.8583	-2.3333	-2.3333	0.0208	0.0000
2.25	42.9688	42.6423	17.4243	17.2857	-2.2031	-2.2031	1.0833	1.0625
2.50	47.2560	46.8984	16.9249	16.7802	-1.7917	-1.7917	2.2708	2.2500
2.75	51.4312	51.0442	16.5675	16.4159	-1.0677	-1.0677	3.5833	3.5625
3.00^-	55.5397	55.1250	16.4340	16.2750	0.0000	0.0000	5.0208	5.0000
3.00^+			-27.1094	-27.0000				
3.25	48.7624	48.3882	-26.9486	-26.8411	1.2865	1.2812	5.2708	5.2500
3.50	42.0654	41.7318	-26.4583	-26.3542	2.6354	2.6250	5.5208	5.5000
3.75	35.5332	35.2397	-25.6230	-25.5234	4.0469	4.0312	5.7708	5.7500
4.00	29.2539	29.0000	-24.4271	-24.3333	5.5208	5.5000	6.0208	6.0000
4.25	23.3197	23.1043	-22.8548	-22.7682	7.0573	7.0312	6.2708	6.2500
4.50	17.8265	17.6484	-20.8906	-20.8125	8.6563	8.6250	6.5208	6.5000
4.75	12.8743	12.7319	-18.5189	-18.4505	10.3177	10.2812	6.7708	6.7500
5.00	8.5671	8.4583	-15.7240	-15.6667	12.0417	12.0000	7.0208	7.0000
5.25	5.0124	4.9351	-12.4902	-12.4453	13.8281	13.7812	7.2708	7.2500
5.50	2.3219	2.2734	-8.8021	-8.7708	15.6771	15.6250	7.5208	7.5000
5.75	0.6113	0.5887	-4.6439	-4.6276	17.5885	17.5312	7.7708	7.7500
6.00	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	19.5625	19.5000	8.0208	8.0000

Tabla 5.3

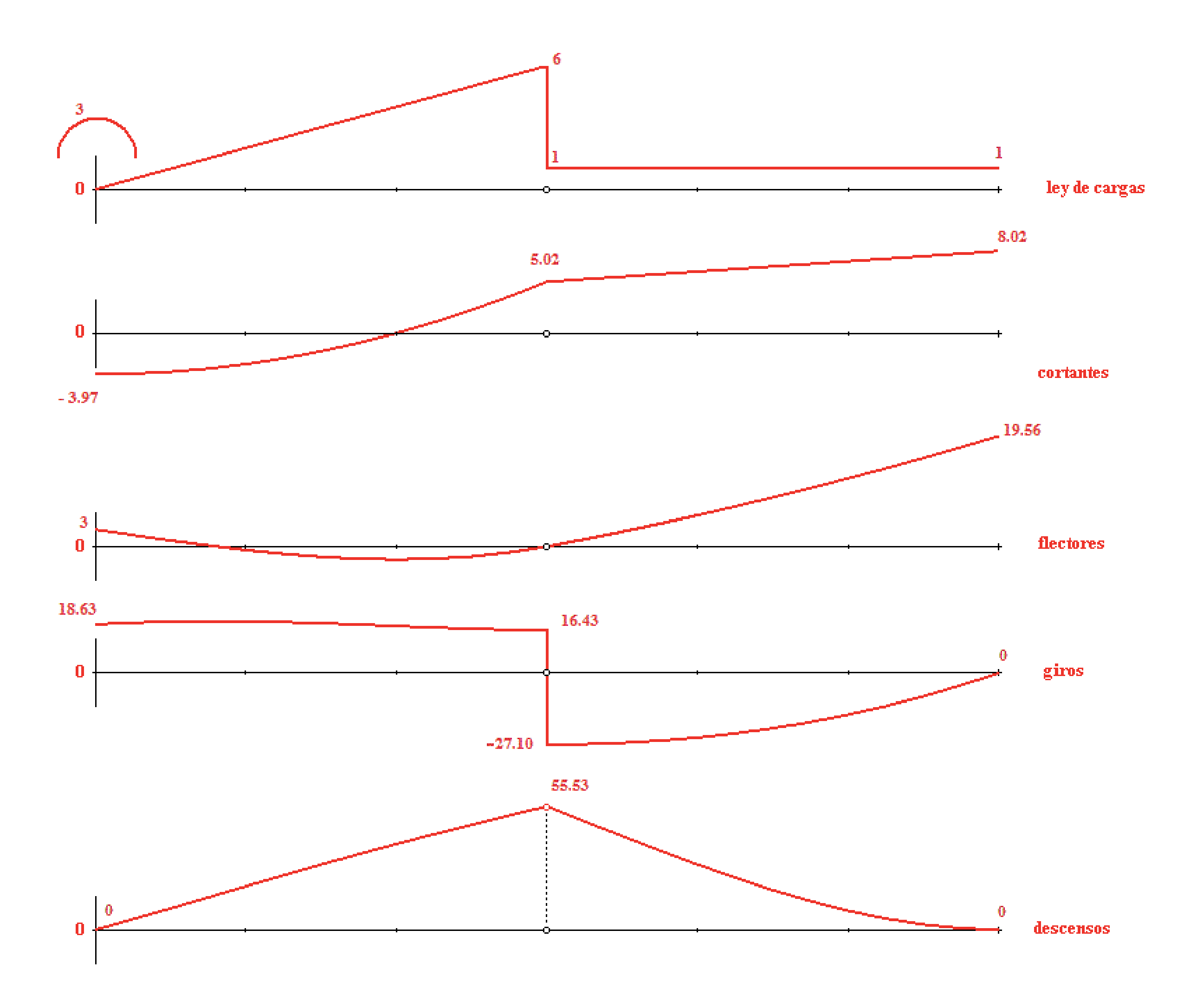

3
6
0
1
1
ley de cargas
8.02
5.02
0
cortantes
- 3.97
19.56
3
0
flectores
18.63
16.43
0
0
giros
-27.10
55.53
0
0
0
descensos

Figura 5.3

5.2. Viga compuesta apoyada-empotrada con un apoyo rígido

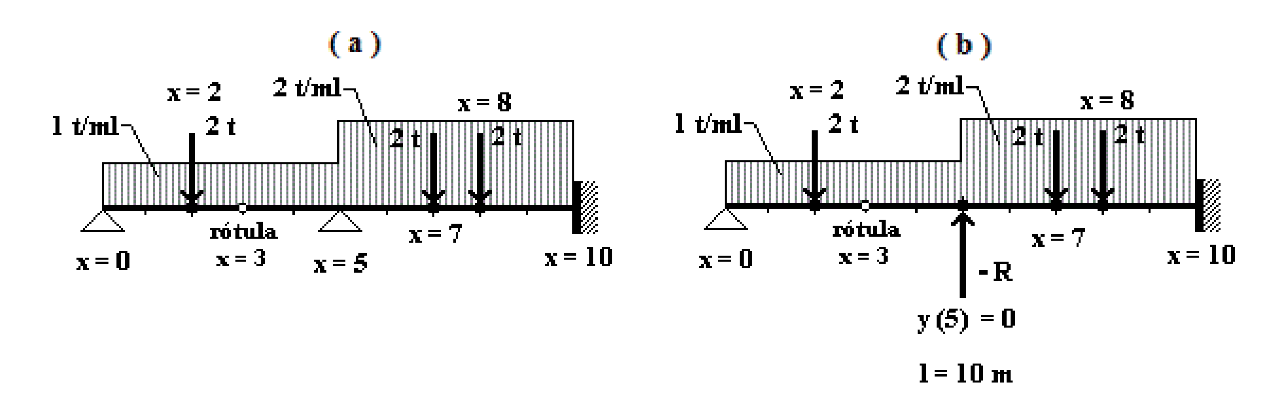


Figura 5.4

Se considera una viga de dos tramos apoyada-empotrada con el apoyo rígido en el punto medio y una rótula a tres metros del apoyo izquierdo con sobrecargas uniformes y cargas concentradas con los valores indicados y en los puntos señalados en la figura 5.4(a). El modelo que la convierte en una viga de un solo tramo equivalente se indica en la figura 5.4(b).

Teniendo en cuenta el esquema de la figura 5.5, el sistema de ecuaciones resultante será en este caso:

1ª etapa

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_2-2m_1+m_0\left(d\right)\right) &= 1,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_3-2m_2+m_1\right) &= 1,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_4-2m_3+m_2\right) &= 1,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_5-2m_4+m_3\right) &= 1,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_6-2m_5+m_4\right) &= 1,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_7-2m_6+m_5\right) &= 1,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_8-2m_7+m_6\right) &= 1,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_9-2m_8+m_7\right) &= 1+\tfrac{2}{0.25},
\end{aligned}$$

2ª etapa

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_2-2y_1+y_0\right) &= m_1,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_3-2y_2+y_1\right) &= m_2,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_4-2y_3+y_2\right) &= m_3,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_5-2y_4+y_3\right) &= m_4,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_6-2y_5+y_4\right) &= m_5,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_7-2y_6+y_5\right) &= m_6,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_8-2y_7+y_6\right) &= m_7,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_9-2y_8+y_7\right) &= m_8,
\end{aligned}$$

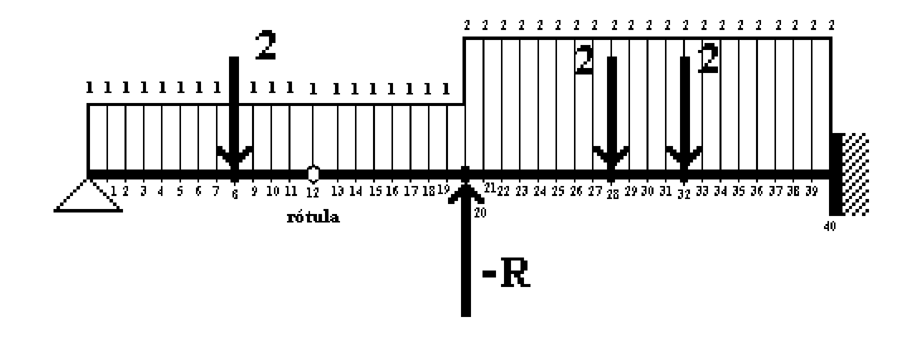


Figura 5.5

$$
\begin{aligned}
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{10}-2m_9+m_8\right) &= 4,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{11}-2m_{10}+m_9\right) &= 1,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{12}-2m_{11}+m_{10}\right) &= 1,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{13}-2m_{12}+m_{11}\right) &= 1,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{14}-2m_{13}+m_{12}\right) &= 1,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{15}-2m_{14}+m_{13}\right) &= 1,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{16}-2m_{15}+m_{14}\right) &= 1,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{17}-2m_{16}+m_{15}\right) &= 1,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{18}-2m_{17}+m_{16}\right) &= 1,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{19}-2m_{18}+m_{17}\right) &= 1,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{20}-2m_{19}+m_{18}\right) &= 1,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{21}-2m_{20}+m_{19}\right) &= 1.5+\tfrac{R}{0.25},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{22}-2m_{21}+m_{20}\right) &= 2,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{23}-2m_{22}+m_{21}\right) &= 2,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{24}-2m_{23}+m_{22}\right) &= 2,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{25}-2m_{24}+m_{23}\right) &= 2,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{26}-2m_{25}+m_{24}\right) &= 2,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{27}-2m_{26}+m_{25}\right) &= 2,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{28}-2m_{27}+m_{26}\right) &= 2,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{29}-2m_{28}+m_{27}\right) &= 2+\tfrac{2}{0.25},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{30}-2m_{29}+m_{28}\right) &= 2,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{31}-2m_{30}+m_{29}\right) &= 2,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{32}-2m_{31}+m_{30}\right) &= 2,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{33}-2m_{32}+m_{31}\right) &= 2+\tfrac{2}{0.25},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{34}-2m_{33}+m_{32}\right) &= 2,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{35}-2m_{34}+m_{33}\right) &= 2,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{36}-2m_{35}+m_{34}\right) &= 2,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{37}-2m_{36}+m_{35}\right) &= 2,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{38}-2m_{37}+m_{36}\right) &= 2,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{39}-2m_{38}+m_{37}\right) &= 2,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{40}\left(i\right)-2m_{39}+m_{38}\right) &= 2,
\end{aligned}
$$

con las condiciones:
$m_0\left(d\right)=0,$
$m_{12}=0,$

$$
\begin{aligned}
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{10}-2y_9+y_8\right) &= m_9,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{11}-2y_{10}+y_9\right) &= m_{10},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{12}-2y_{11}+y_{10}\right) &= m_{11},\\
\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{14}-2y_{13}+y_{12}\right) &= m_{13},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{15}-2y_{14}+y_{13}\right) &= m_{14},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{16}-2y_{15}+y_{14}\right) &= m_{15},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{17}-2y_{16}+y_{15}\right) &= m_{16},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{18}-2y_{17}+y_{16}\right) &= m_{17},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{19}-2y_{18}+y_{17}\right) &= m_{18},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{20}-2y_{19}+y_{18}\right) &= m_{19},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{21}-2y_{20}+y_{19}\right) &= m_{20},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{22}-2y_{21}+y_{20}\right) &= m_{21},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{23}-2y_{22}+y_{21}\right) &= m_{22},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{24}-2y_{23}+y_{22}\right) &= m_{23},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{25}-2y_{24}+y_{23}\right) &= m_{24},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{26}-2y_{25}+y_{24}\right) &= m_{25},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{27}-2y_{26}+y_{25}\right) &= m_{26},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{28}-2y_{27}+y_{26}\right) &= m_{27},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{29}-2y_{28}+y_{27}\right) &= m_{28},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{30}-2y_{29}+y_{28}\right) &= m_{29},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{31}-2y_{30}+y_{29}\right) &= m_{30},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{32}-2y_{31}+y_{30}\right) &= m_{31},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{33}-2y_{32}+y_{31}\right) &= m_{32},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{34}-2y_{33}+y_{32}\right) &= m_{33},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{35}-2y_{34}+y_{33}\right) &= m_{34},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{36}-2y_{35}+y_{34}\right) &= m_{35},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{37}-2y_{36}+y_{35}\right) &= m_{36},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{38}-2y_{37}+y_{36}\right) &= m_{37},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{39}-2y_{38}+y_{37}\right) &= m_{38},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{40}-2y_{39}+y_{38}\right) &= m_{39},
\end{aligned}
$$

con las condiciones:
$y_0=0,$
$y_{20}=0,$
$y_{39}=\frac{1}{2}\cdot 0.25^2\cdot m_{40}\left(i\right),$
$y_{40}=0.$

Este sistema debe de ser resuelto en sus dos etapas conjuntamente. A partir de su solución podemos calcular los esfuerzos de corte y los giros de las secciones transversales. En la tabla 5.4 se muestran estos valores aproximados sobre la red $h=0.25$ y los valores exactos obtenidos por métodos continuos. La solución de este problema se completa con el valor $R=-12.1660$.

Los datos numéricos obtenidos nos permiten reconstruir las gráficas aproximadas de las funciones de esfuerzo y de deformación que se representan junto a la ley de cargas en la figura 5.6.

x	descensos By		giros $B\theta = By'$		momentos $m = By''$		cortantes $t = By'''$	
	discretos	exactos	discretos	exactos	discretos	exactos	discretos	exactos
0.00	0.0000	0.0000	6.1502	6.1157	0.0000	0.0000	-2.1667	-2.1667
0.25	1.5375	1.5235	6.0864	6.0506	-0.5104	-0.5104	-1.9167	-1.9167
0.50	3.0432	3.0153	5.9028	5.8657	-0.9583	-0.9583	-1.6667	-1.6667
0.75	4.4889	4.4476	5.6150	5.5767	-1.3438	-1.3438	-1.4167	-1.4167
1.00	5.8507	5.7963	5.2387	5.1991	-1.6667	-1.6667	-1.1667	-1.1667
1.25	7.1083	7.0411	4.7895	4.7486	-1.9271	-1.9271	-0.9167	-0.9167
1.50	8.2454	8.1658	4.2830	4.2407	-2.1250	-2.1250	-0.6667	-0.6667
1.75	9.2498	9.1580	3.7348	3.6913	-2.2604	-2.2604	-0.4167	-0.4167
2.00^-	10.1128	10.0093	3.1606	3.1157	-2.3333	-2.3333	-0.1667	-0.1667
2.00^+							1.8333	1.8333
2.25	10.8301	10.7202	2.6384	2.5923	-1.8438	-1.8438	2.0833	2.0833
2.50	11.4321	11.3163	2.2465	2.1991	-1.2917	-1.2917	2.3333	2.3333
2.75	11.9533	11.8319	2.0004	1.9517	-0.6771	-0.6771	2.5833	2.5833
3.00^-	12.4323	12.3056	1.9158	1.8657	-0.0000	0.0000	2.8333	2.8333
3.00^+			-8.4036	-8.3750				
3.25	10.3314	10.2193	-8.3112	-8.2839	0.7396	0.7396	3.0833	3.0833
3.50	8.2767	8.1797	-8.0260	-8.0000	1.5417	1.5417	3.3333	3.3333
3.75	6.3183	6.2367	-7.5325	-7.5078	2.4062	2.4062	3.5833	3.5833
4.00	4.5104	4.4444	-6.8151	-6.7917	3.3333	3.3333	3.8333	3.8333
4.25	2.9108	2.8608	-5.8581	-5.8359	4.3229	4.3229	4.0833	4.0833
4.50	1.5814	1.5477	-4.6458	-4.6250	5.3750	5.3750	4.3333	4.3333
4.75	0.5879	0.5709	-3.1628	-3.1432	6.4896	6.4896	4.5833	4.5833
5.00^-	0.0000	0.0000	-1.3932	-1.3750	7.6667	7.6667	4.8333	4.8333
5.00^+							-7.3327	-7.3300
5.25	-0.1087	-0.1229	0.3021	0.3178	5.8960	5.8967	-6.8327	-6.8300
5.50	0.1511	0.1233	1.5704	1.5837	4.2503	4.2517	-6.3327	-6.3300
5.75	0.6765	0.6360	2.4429	2.4541	2.7296	2.7317	-5.8327	-5.8300
6.00	1.3725	1.3200	2.9508	2.9600	1.3340	1.3367	-5.3327	-5.3300
6.25	2.1519	2.0882	3.1255	3.1328	0.0633	0.0667	-4.8327	-4.8300
6.50	2.9353	2.8613	2.9981	3.0038	-1.0824	-1.0783	-4.3327	-4.3300
6.75	3.6510	3.5675	2.5999	2.6041	-2.1031	-2.0983	-3.8327	-3.8300
7.00^-	4.2352	4.1433	1.9622	1.9650	-2.9988	-2.9933	-3.3327	-3.3300
7.00^+							-1.3327	-1.3300
7.25	4.6321	4.5379	1.1787	1.1803	-3.2694	-3.2633	-0.8327	-0.8300
7.50	4.8246	4.7292	0.3431	0.3438	-3.4151	-3.4083	-0.3327	-0.3300
7.75	4.8036	4.7081	-0.5133	-0.5134	-3.4358	-3.4283	0.1673	0.1700
8.00^-	4.5679	4.4733	-1.3592	-1.3600	-3.3315	-3.3233	0.6673	0.6700
8.00^+							2.6673	2.6700
8.25	4.1240	4.0368	-2.1009	-2.1022	-2.6021	-2.5933	3.1673	3.1700
8.50	3.5175	3.4388	-2.6446	-2.6463	-1.7478	-1.7383	3.6673	3.6700
8.75	2.8017	2.7327	-2.9591	-2.9609	-0.7685	-0.7583	4.1673	4.1700
9.00	2.0379	1.9800	-3.0132	-3.0150	0.3358	0.3467	4.6673	4.6700
9.25	1.2951	1.2496	-2.7756	-2.7772	1.5652	1.5767	5.1673	5.1700
9.50	0.6501	0.6183	-2.2150	-2.2163	2.9195	2.9317	5.6673	5.6700
9.75	0.1876	0.1710	-1.3002	-1.3009	4.3988	4.4117	6.1673	6.1700
10.00	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	6.0031	6.0167	6.6673	6.6700

Tabla 5.4

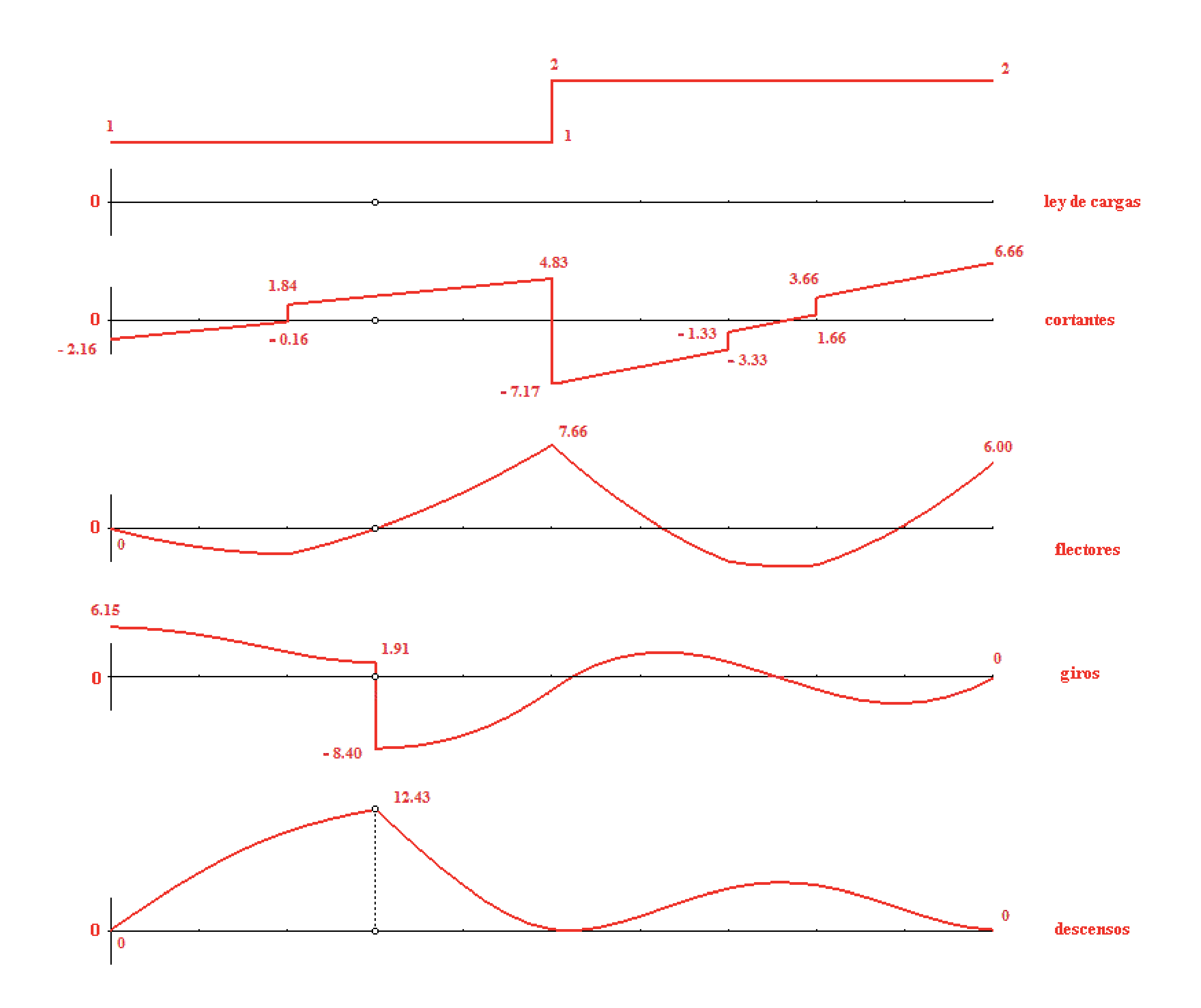

2
2
1
1
0
ley de cargas
6.66
4.83
3.66
1.84
0
cortantes
- 2.16
- 0.16
- 1.33
1.66
- 3.33
- 7.17
7.66
6.00
0
0
flectores
6.15
1.91
0
0
giros
- 8.40
12.43
0
0
0
descensos

Figura 5.6

5.3. Viga doblemente empotrada con dos apoyos rígidos interiores

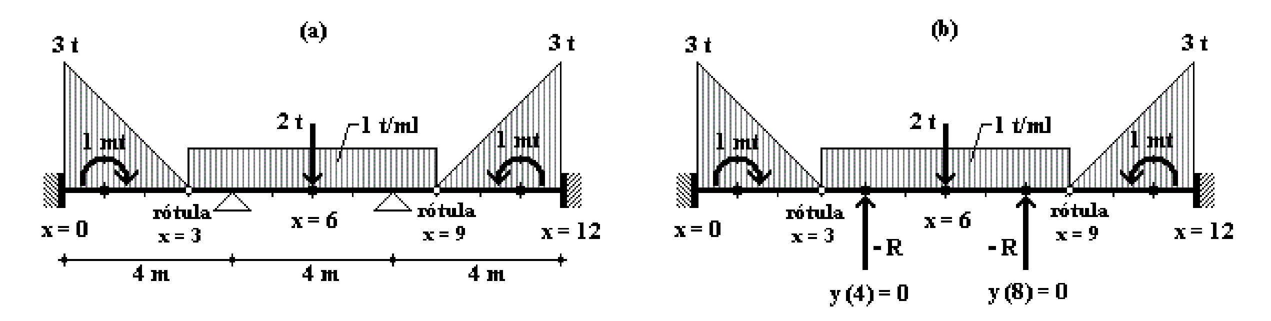


Figura 5.7

Se considera una viga continua de tres tramos de 4 m de longitud cada uno, perfectamente empotrada en sus dos extremos con simetría de carga y de forma tal y como se indica en el esquema superior de la figura 5.7(a), en la que se representa, así mismo, la magnitud y posición de las solicitaciones puntuales. La viga presenta dos articulaciones, cada una a 3 m de los empotramientos.

El esquema inferior de la figura 5.7(b) nos muestra el diagrama equivalente que lo convierte en una viga de un solo tramo doblemente empotrada.

En el esquema representado en la figura 5.8, sobre una red de paso $h = 0.25$, se han impuesto las condiciones de simetría en la numeración de los nodos. Tanto los descensos como los momentos flectores son funciones pares respecto el eje longitudinal de la viga y su perpendicular –vertical– por el punto medio de la pieza.

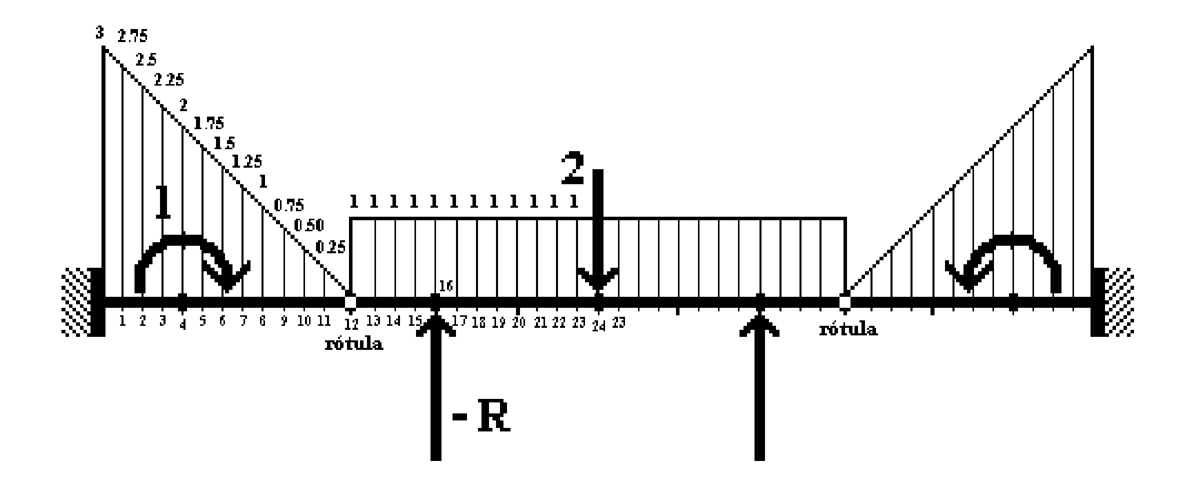


Figura 5.8

El sistema de ecuaciones correspondiente resultará ser:

1ª etapa

$$
\begin{aligned}
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_2 - 2m_1 + m_0\left(d\right)\right) &= 2.75,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_3 - 2m_2 + m_1\right) &= 2.5,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_4\left(i\right) - 2m_3 + m_2\right) &= 2.25,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_5 - 2m_4\left(i\right) + m_3\right) &= 2 - \tfrac{1}{0.25^2},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_6 - 2m_5 + m_4\left(d\right)\right) &= 1.75,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_7 - 2m_6 + m_5\right) &= 1.5,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_8 - 2m_7 + m_6\right) &= 1.25,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_9 - 2m_8 + m_7\right) &= 1,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{10} - 2m_9 + m_8\right) &= 0.75,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{11} - 2m_{10} + m_9\right) &= 0.5,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{12} - 2m_{11} + m_{10}\right) &= 0.25,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{13} - 2m_{12} + m_{11}\right) &= 0.5,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{14} - 2m_{13} + m_{12}\right) &= 1,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{15} - 2m_{14} + m_{13}\right) &= 1,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{16} - 2m_{15} + m_{14}\right) &= 1,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{17} - 2m_{16} + m_{15}\right) &= 1 + \tfrac{R}{0.25},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{18} - 2m_{17} + m_{16}\right) &= 1,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{19} - 2m_{18} + m_{17}\right) &= 1,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{20} - 2m_{19} + m_{18}\right) &= 1,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{21} - 2m_{20} + m_{19}\right) &= 1,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{22} - 2m_{21} + m_{20}\right) &= 1,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{23} - 2m_{22} + m_{21}\right) &= 1,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{24} - 2m_{23} + m_{22}\right) &= 1,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{23} - 2m_{24} + m_{23}\right) &= 1 + \tfrac{2}{0.25},
\end{aligned}
$$

con las condiciones:

$m_{12} = 0,$

$m_4\left(d\right) = m_4\left(i\right) - 1,$

2ª etapa

$$
\begin{aligned}
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_2 - 2y_1 + y_0\right) &= m_1,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_3 - 2y_2 + y_1\right) &= m_2,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_4 - 2y_3 + y_2\right) &= m_3,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_5 - 2y_4 + y_3\right) &= m_4,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_6 - 2y_5 + y_4\right) &= m_5,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_7 - 2y_6 + y_5\right) &= m_6,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_8 - 2y_7 + y_6\right) &= m_7,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_9 - 2y_8 + y_7\right) &= m_8,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{10} - 2y_9 + y_8\right) &= m_9,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{11} - 2y_{10} + y_9\right) &= m_{10},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{12} - 2y_{11} + y_{10}\right) &= m_{11},\\
\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{14} - 2y_{13} + y_{12}\right) &= m_{13},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{15} - 2y_{14} + y_{13}\right) &= m_{14},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{16} - 2y_{15} + y_{14}\right) &= m_{15},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{17} - 2y_{16} + y_{15}\right) &= m_{16},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{18} - 2y_{17} + y_{16}\right) &= m_{17},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{19} - 2y_{18} + y_{17}\right) &= m_{18},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{20} - 2y_{19} + y_{18}\right) &= m_{19},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{21} - 2y_{20} + y_{19}\right) &= m_{20},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{22} - 2y_{21} + y_{20}\right) &= m_{21},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{23} - 2y_{22} + y_{21}\right) &= m_{22},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{24} - 2y_{23} + y_{22}\right) &= m_{23},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{23} - 2y_{24} + y_{23}\right) &= m_{24},
\end{aligned}
$$

con las condiciones:

$y_0 = 0,$

$y_1 = \frac{1}{2} \cdot 0.25^2 \cdot m_0\left(d\right),$

$y_{16} = 0.$

Las solución de este sistema, así como los esfuerzos de corte y los giros de las secciones transversales que se pueden reconstruir a partir de estos valores, se muestran en la tabla 5.5 junto con las soluciones exactas de este problema. La solución de este problema se completa con $R = -5.2416$.

Estas soluciones nos permiten construir las gráficas aproximadas de las funciones de esfuerzo y de deformación. Las cuatro funciones se representan junto a la ley de cargas en la figura 5.9.

x	descensos By		giros $B\theta = By'$		momentos $m = By''$		cortantes $t = By'''$	
	discretos	exactos	discretos	exactos	discretos	exactos	discretos	exactos
0.00	0.0000	0.0000	0.0000	1.0000	1.7440	1.7566	-3.2584	-3.2522
0.25	0.0545	0.0469	0.3459	0.3452	1.0231	1.0347	-2.5397	-2.5335
0.50	0.1729	0.1594	0.5331	0.5317	0.4742	0.4847	-1.8834	-1.8772
0.75	0.3210	0.3029	0.6025	0.6005	0.0814	0.0909	-1.2897	-1.2834
1.00^-	0.4742	0.4529	0.5913	0.5888	-0.1707	-0.1623	-0.7584	-0.7522
1.00^+					-1.1707	-1.1623		
1.25	0.5854	0.5622	0.2828	0.2798	-1.2978	-1.2904	-0.2897	-0.2834
1.50	0.6156	0.5914	-0.0439	-0.0472	-1.3155	-1.3092	0.1166	0.1228
1.75	0.5635	0.5392	-0.3632	-0.3669	-1.2395	-1.2342	0.4603	0.4665
2.00	0.4340	0.4103	-0.6538	-0.6578	-1.0853	-1.0811	0.7416	0.7478
2.25	0.2366	0.2142	-0.8981	-0.9023	-0.8687	-0.8655	0.9603	0.9665
2.50	-0.0151	-0.0358	-1.0823	-1.0867	-0.6052	-0.6031	1.1166	1.1228
2.75	-0.3046	-0.3234	-1.1968	-1.2012	-0.3104	-0.3093	1.2103	1.2165
3.00^-	-0.6135	-0.6301	-1.2356	-1.2401	0.0000	0.0000	1.3041	1.2478
3.00^+			0.3804	0.3805				
3.25	-0.5184	-0.5316	0.4231	0.4221	0.3416	0.3432	1.4916	1.4978
3.50	-0.4019	-0.4113	0.5590	0.5573	0.7458	0.7489	1.7416	1.7478
3.75	-0.2388	-0.2438	0.8038	0.8018	1.2124	1.2171	1.9916	1.9978
4.00^-	0.0000	0.0000	1.1731	1.1711	1.7416	1.7478	2.2416	2.2478
4.00^+							-3.0000	-3.0000
4.25	0.3477	0.3397	1.5186	1.5169	1.0228	1.0290	-2.7500	-2.7500
4.50	0.7593	0.7441	1.6923	1.6908	0.3666	0.3728	-2.5000	-2.5000
4.75	1.1938	1.1721	1.7097	1.7085	-0.2272	-0.2210	-2.2500	-2.2500
5.00	1.6142	1.5866	1.5865	1.5855	-0.7584	-0.7522	-2.0000	-2.0000
5.25	1.9871	1.9545	1.3383	1.3376	-1.2272	-1.2209	-1.7500	-1.7500
5.50	2.2834	2.2463	0.9808	0.9803	-1.6334	-1.6272	-1.5000	-1.5000
5.75	2.4775	2.4368	0.5294	0.5292	-1.9772	-1.9709	-1.2500	-1.2500
6.00^-	2.5481	2.5044	0.0000	0.0000	-2.2584	-2.2522	-1.0000	-1.0000
6.00^+							1.0000	1.0000

Tabla 5.5

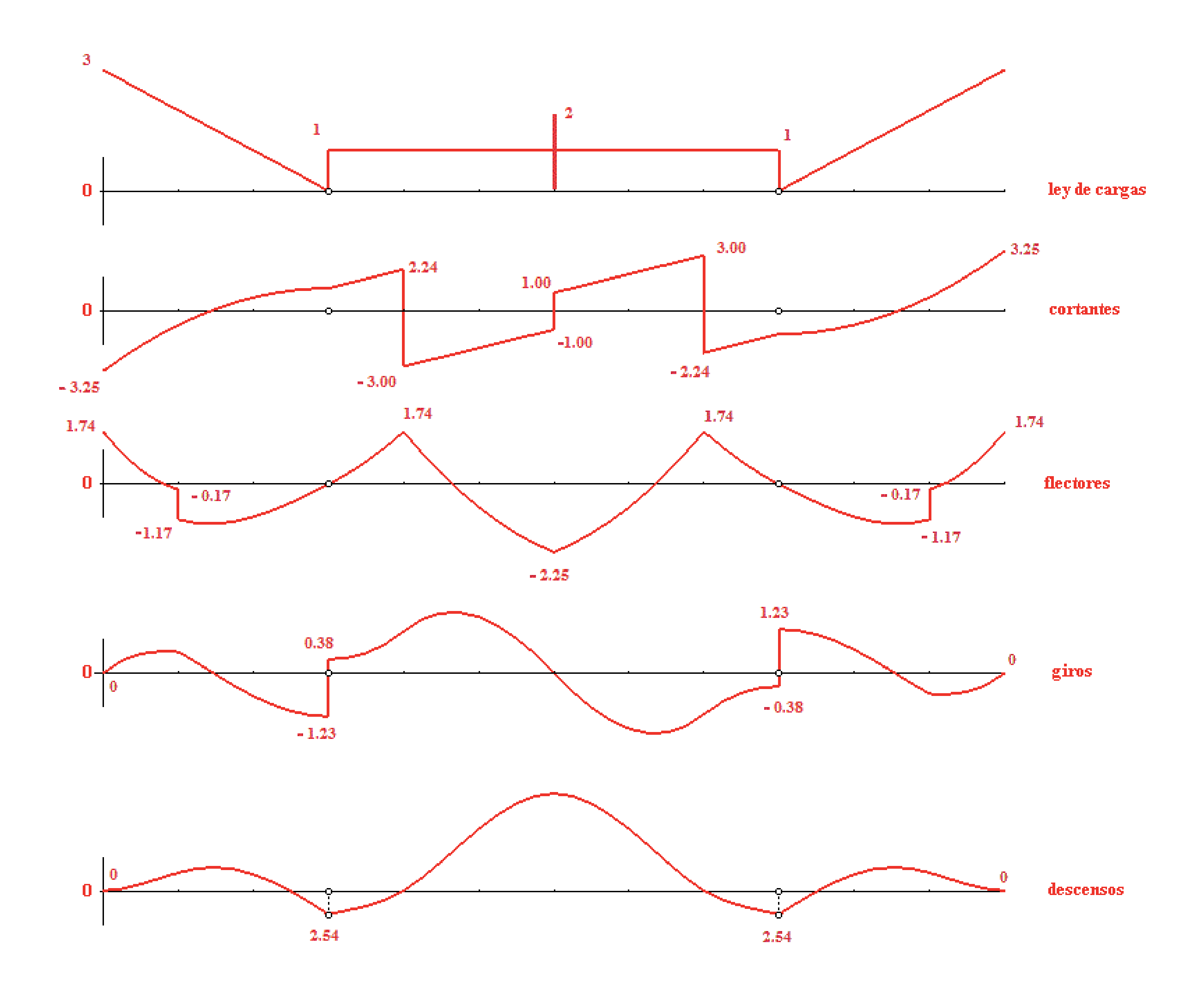

3
1
2
1
0
ley de cargas
2.24
1.00
3.00
3.25
0
cortantes
-3.25
-3.00
-1.00
-2.24
1.74
1.74
1.74
1.74
0
-0.17
-0.17
flectores
-1.17
-1.17
-2.25
1.23
0.38
0
0
0
giros
-1.23
-0.38
0
0
0
descensos
2.54
2.54

Figura 5.9

6 Resolución matricial del sistema de diferencias finitas

Como ya se ha ido haciendo en muchos de los ejemplos resueltos a lo largo del presente texto, los problemas en diferencias finitas pueden ser expresados de forma matricial para valores h genéricos. Esto permite resolver los distintos problemas para distintos valores de h sin necesidad de escribir un nuevo sistema.

Así, dada una viga de longitud l y supuesto que tomamos la discretización $R_h^1[0,l]$ para un paso h tal que $h = \frac{l}{N}$, a partir de la tabla 3.4 buscamos los valores de los momentos y flechas en cada $x_j \in R_h^1[0,l]$, es decir, y_j y m_j, para $0 \leq i \leq N$.

Introducimos los vectores siguientes:

$$Y = \begin{pmatrix} y_0\,(d) \\ y_1\,(i) \\ y_2\,(i) \\ \vdots \\ y_N\,(i) \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad M = \begin{pmatrix} m_0\,(d) \\ m_1\,(i) \\ m_2\,(i) \\ \vdots \\ m_N\,(i) \end{pmatrix}.$$

Así mismo, denotamos por Q_i y M_i a las cargas puntuales y momentos de flexión aislados actuando sobre cada nodo x_i, y definimos también los vectores

$$Q = \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ \vdots \\ Q_{N-1} \end{pmatrix}, \qquad Z = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ \vdots \\ M_{N-1} \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad W = \begin{pmatrix} \bar{w}_1 \\ \bar{w}_2 \\ \bar{w}_3 \\ \vdots \\ \bar{w}_{N-1} \end{pmatrix}.$$

Por último, definimos la matriz de $N-1$ filas y $N+1$ columnas siguiente:

$$A_{11} = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & & & & \\ & 1 & -2 & 1 & & & \\ & & 1 & -2 & 1 & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \in M_{(N-1)\times(N+1)}(\mathbb{R})$$

Utilizando (3.3) y (3.4), podemos escribir

$$\begin{aligned} A_{11}M &= W + \frac{1}{h}Q + \frac{1}{h^2}Z, \\ A_{11}Y &= M + \frac{1}{2}Z. \end{aligned}$$

Estas dos expresiones nos generan $2\,(N-1)$ ecuaciones que deben completarse incluyendo las condiciones de contorno del problema. Escribiremos el problema como un único sistema matricial de la siguiente manera:

$$AX = F. \tag{6.1}$$

Para ello la matriz A será una matriz por bloques dada por

$$A = \left(\begin{array}{c|c} A_{11} & 0 \\ \hline A_{21} & A_{22} \\ \hline A_{31} & A_{32} \\ \hline A_{41} & A_{42} \end{array}\right) \in M_{2(N+1)\times 2(N+1)}\left(\mathbb{R}\right),$$

los vectores columna X y F de dimensión $2\,(N+1)$ serán

$$X = \left(\begin{array}{c} M \\ \hline Y \end{array}\right) \qquad \text{y} \qquad F = \left(\begin{array}{c} W + \frac{1}{h}Q + \frac{1}{h^2}Z \\ \hline \frac{1}{2}Z \\ \hline F_3 \\ \hline F_4 \end{array}\right).$$

La submatriz $A_{22} = A_{11}$, mientras que

$$A_{21} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & & & & \\ & 0 & -1 & 0 & & & \\ & & 0 & -1 & 0 & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in M_{(N-1)\times(N+1)}\left(\mathbb{R}\right)$$

y las submatrices A_{31}, A_{32}, A_{41} y A_{42} junto con F_3 y F_4 expresan las condiciones de contorno dadas por la tabla 3.2:

a. Extremo izquierdo:

1. Empotramiento perfecto:

$$A_{31} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{1}{2}h^2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \qquad A_{32} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \qquad F_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2. Apoyo rígido:

$$A_{31} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \qquad A_{32} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \qquad F_3 = \begin{pmatrix} M_0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

3. Extremo libre:

$$A_{31} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \qquad A_{32} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$
$$F_3 = \begin{pmatrix} M_0 \\ \frac{1}{2}w_0\,(d) + hQ_0 + M_0 \end{pmatrix}.$$

b. Extremo derecho:

1. Empotramiento perfecto:

$$A_{41} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & -\frac{1}{2}h^2 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A_{42} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad F_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2. Apoyo rígido:

$$A_{41} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A_{42} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad F_4 = \begin{pmatrix} -M_N \\ 0 \end{pmatrix}.$$

3. Extremo libre:

$$A_{41} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A_{42} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$F_4 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}h^2 w_N + hQ_N - M_N - M_{N-1} \\ -M_N \end{pmatrix}.$$

6.1. Incluyendo apoyos rígidos interiores

Tal y como se vio en el § 4, los apoyos rígidos interiores de una viga incorporan una nueva condición de descenso nulo en el nodo donde se encuentre localizado dicho apoyo junto con la inclusión de una nueva incógnita por apoyo –reacción sobre el apoyo–. Para incluir un número genérico de apoyos rígidos sobre una viga modificaremos ligeramente el sistema (6.1). Para ello primero introduciremos el vector

$$R = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ \vdots \\ R_{N-1} \end{pmatrix},$$

donde cada R_j será la posible reacción sobre el apoyo situado en x_j. En el caso de que en un nodo x_j no exista apoyo, de forma genérica impondremos $R_j = 0$. De esta manera, la matriz

$A \in M_{(3N+1)\times(3N+1)}(\mathbb{R})$ y los vectores X y F del sistema (6.1) quedarán:

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c} A_{11} & 0 & A_{13} \\ \hline A_{21} & A_{22} & 0 \\ \hline A_{31} & A_{32} & 0 \\ \hline A_{41} & A_{42} & 0 \\ \hline 0 & A_{54} & A_{55} \end{array}\right), \tag{6.2}$$

y

$$X = \begin{pmatrix} M \\ \hline Y \\ \hline R \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad F = \begin{pmatrix} W + \frac{1}{h}Q + \frac{1}{h^2}Z \\ \hline \frac{1}{2}Z \\ \hline F_3 \\ \hline F_4 \\ \hline 0 \end{pmatrix}, \tag{6.3}$$

donde ahora la matriz A_{13} incluye las reacciones R_i sobre cada posible apoyo interior:

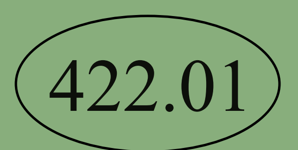
$$A_{13} = -\frac{1}{h} I_{N-1} \in M_{(N-1)\times(N-1)}(\mathbb{R}),$$

siendo I_{N-1} la matriz identidad, mientras que $A_{54} \in M_{(N-1)\times(N+1)}(\mathbb{R})$ y $A_{55} \in M_{(N-1)\times(N-1)}(\mathbb{R})$ incluyen la condición de descenso nulo sobre los apoyos interiores y reacción nula sobre los puntos en los que no exista apoyo respectivamente. Para ello, la matriz $A_{55} = I_{N-1}$ y se modifica haciendo nulos los elementos de la diagonal correspondientes a aquellos nodos en los que exista apoyo. A su vez, la matriz $A_{54} = 0$ y se modifica añadiendo la unidad en el elemento en la fila j y columna $j+1$ para cada apoyo situado en el nodo x_j.

6.2. Incluyendo rótulas interiores

La extensión a vigas compuestas pasa por la inclusión de rótulas interiores tal y como se describe en § 5. Para ello basta con modificar nuevamente el sistema (6.1). Partiendo de la matriz A de (6.2) y los vectores X y F de (6.3), podemos incluir articulaciones en la viga añadiendo la condición de momento nulo en cada nodo x_j donde exista una rótula y eliminando la ecuación de la segunda etapa. Para ello, si en el nodo x_j existe una rótula, anularemos los elementos de la fila j-ésima de la matriz A_{22} así como del vector $F_2 = \frac{1}{2}Z$.

CUADERNO



Cuadernos.ijh@gmail.com
info@mairea-libros.com

